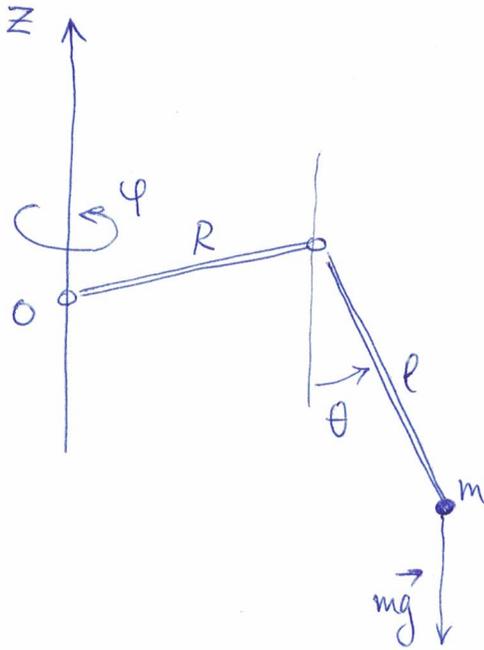


Задача 6

1

1) Кацели-карусели состоит из двух (невесомых нерастяжимых) стержней.



Первый стержень длины R закреплён одним концом в начале координат O и свободно вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси Oz . Второй стержень длины l одним концом прикреплен шарниром к первому стержню и свободно вращается в плоскости первого стержня и оси Oz . На

другом конце стержня помещена точка массы m , на нее действует сила тяжести mg .

а) составьте лагранжиан системы в терминах координат φ и θ

б) выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа и определите стационарные по θ траектории. Сколько будет таких траекторий при $R > l$ и $R < l$? (считайте, что $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$)

в) выпишите законы сохранения, используйте их для перехода к эффективной одномерной системе и нарисуйте качественно её фазовый портрет.

(2)

Функционал

$$S[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + y^3 y' - y^2) dx$$

(2)

задан на пространстве дважды дифференцируемых функций $y(x)$, $x \in [0, \pi/2]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0) = y(\pi/2) = 1$

а) найдите любой вид экстремали функционала $S[y(x)]$.

б) Какой "закон сохранения" имеется у этой задачи? Запишите его в виде формулы.

(3) (Разковизность задачи о брахистохроке). Какой должна быть форма горки, чтобы санки, соскальзывая с нее без трения с нулевой начальной скоростью, могли за кратчайшее время удалиться от вершины горы на расстояние X по горизонтали?

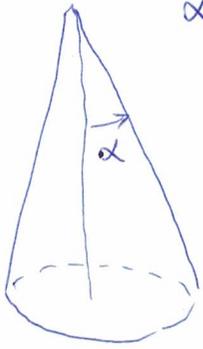
(4) Задачи о геодезических.

а) Свободная точечная частица массы $m=2$ движется по поверхности сферы. Запишите лагранжиан системы, выпишите выражения для сохраняющихся величин (интегралов движения). Пользуясь интегралами движения, составьте дифференциальное уравнение геодезических на сфере и решите его, выбрав подходящую систему сферических координат

б)

3

По поверхности конуса с углом раствора α движется свободная частица массы $m=2$



Запишите лагранжиан системы в цилиндрических координатах; выпишите выражения для сохраняющихся величин.

Пользуясь интегралами движения, составьте диффур геодезической на конусе и решите его

Реш Результат задачи б) является частным случаем

Теоремы Клеро: в фигурах вращения геодезические задаются уравнением

$$\rho \sin \beta = \text{const},$$

где ρ - расстояние до оси вращения, β - угол между геодезической и меридианом.