Задачи к семинару 15 на 22.05.20

Задача 1. Пусть X - произвольная гладкая кубика сизигического пучка кубик, и пусть a - какая-либо из базисных точек пучка. Как мы знаем, a является точкой перегиба для X, и пусть $l = \mathbb{T}_a X$.
(i) Докажите, что в этом сизигическом пучке имеется единственная кубика Y, касающаяся прямой l в некоторой точке $b \neq a$.
(ii) Докажите, что $Y = H(X)$ - гессиан кубики X.

Задача 2. Пусть $(x : y)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^1$, и пусть $\overline{W} = W_{2,3}$ - пространство кубических форм от двух переменных x, y. Всякое подпространство W в $\overline{W}$ задает отображение $f_W : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}(W^*)$, называемое *отображением линейным рядом* $\mathbb{P}(W)$. Размерность пространства $\mathbb{P}(W)$ называется *размерностью линейного ряда* $\mathbb{P}(W)$.
Пусть $W = \overline{W}$. Образ $X = f_{\overline{W}}(\mathbb{P}^1)$ отображения $f_{\overline{W}}$ называется *кубической нормкривой*, или *нормкубикой* в пространстве $\mathbb{P}^3$.
Как мы уже знаем, через нормкубику X проходит квадратичный конус в $\mathbb{P}^3$ с вершиной в некоторой точке $P \in X$. Существуют ли другие квадратичные конуса, содержащие кубику X?

Задача 3. Мы также уже нашли одну неособую квадрику (с уравнением $z_1 z_2 - z_0 z_3 = 0$), проходящую через нормкубику X. Образуют ли все квадрики через, проходящие через X, линейный ряд? Если да, то какова его размерность?

Задача 4. (1) Существуют ли две пересекающиеся хорды l_1 и l_2 нормкубики X такие, что $l_1 \cap X = \{P, Q\}$, $l_2 \cap X = \{R, S\}$, где $P,\ Q,\ R,\ S$ - различные точки?
(2) Существуют ли прямые, пересекающие нормкубику более, чем в двух точках?

Задача 5. Сколько хорд нормкубики проходят через произвольную точку, не лежащую на ней?

Задача 6. (1) В скольких точках пересекает нормкубику X общая плоскость в $\mathbb{P}^3$?
(2) Сколько прямых, касательныхх к нормкубике X, пересекает общая прямая в $\mathbb{P}^3$?

Задача 7. В обозначениях задачи 2 пусть $W = \{F \in \overline{W} \mid \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a) = 0\}$, где $a = (0 : 1)$. Найдите образ отображения f_W.

Задача 8. Пусть $(x : y)$ - проективные координаты в $\mathbb{P}^1$, и пусть $W = W_{2,d}$ - пространство форм степени d от двух переменных x, y. Рассмотрим отображение $f_W : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}(W^*)$ линейным рядом $\mathbb{P}(W)$. Найдите *степень* образа $X = f_W(\mathbb{P}^1)$ отображения f_W, то есть число точек, в которых общая плоскость в $\mathbb{P}^3$ пересекает кривую X.