Дополнение к Семинару № 5 от 12.05.20

Рассмотрим несколько примеров построения лагранжианов физических моделей.

Напомним, что любое такое построение должно начинаться с определения числа степеней свободы модельной системы и выбора удобных обобщённых координат, количество которых равно числу степеней свободы. Удачный выбор этих обобщённых координат во многом определяет успех при решении механических задач.

Для механических систем, в которых отсутствуют связи (то есть, ограничения на движение составляющих систему тел в виде каких-то поверхностей, стержней и т.п.), как правило удобно выбирать декартовы прямоугольные координаты в качестве

обобщённых координат, так как в декартовых координатах просто записывается кинетическая энергия системы.

Однако, свойства симметрии (потенциальных) сил, действующих в системе, могут диктовать и другой выбор обобщённых координат (например, сферических при движении в центральном поле).

Для механических систем в поле <u>потенциальных</u> <u>сил</u> (сила упругости и сила гравитации или сила тяжести) Лагранжиан задаётся формулой:

$$\boxed{L = T_{кин} - U},$$

где $T_{кин}$ – кинетическая энергия, U – сумма потенциалов всех сил, действующих на систему (см. подробности в <u>лекции № 5</u>).

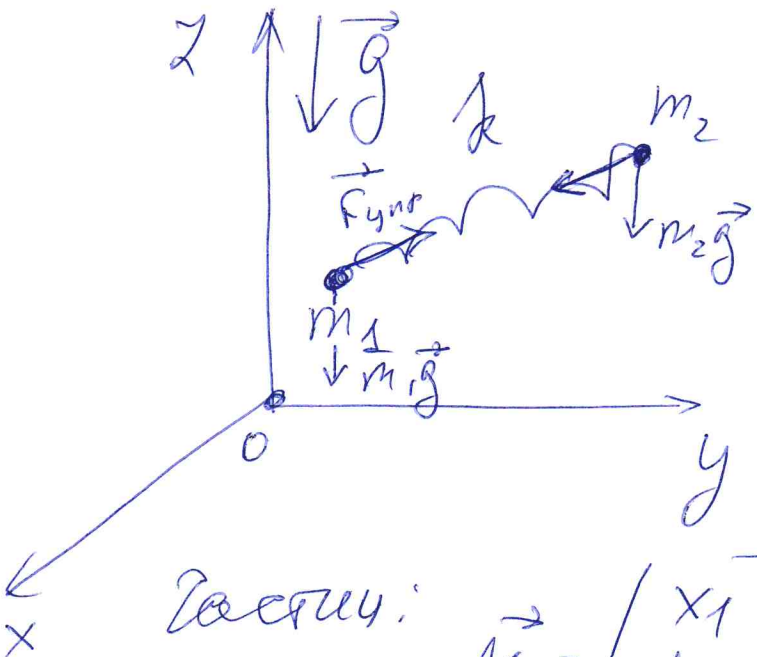
Пример 1

N частиц массы m_i, $1 \le i \le N$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$.

$$T_{кин} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2},$$ где $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i-й частицы

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N).$$

Например, 2 частицы, связанные <u>пружиной</u> жёсткости k в $\mathbb{R}^3$, при этом есть поле тяжести вдоль оси Oz:



Система имеет <u>6</u> степеней свободы. Выбираем в качестве координат <u>декартовы координаты</u> 2х частиц:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

$$T_{кин} = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right).$$

В системе 2 потенциальные силы: сила упругости и сила тяжести.

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U_{упр} + U_{грав}.$$

$$U_{упр} = \frac{k}{2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = \frac{k}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right)$$

$$U_{грав} = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

Напомним, что потенциал силы и сам вектор силы связаны соотношением:

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}.$$

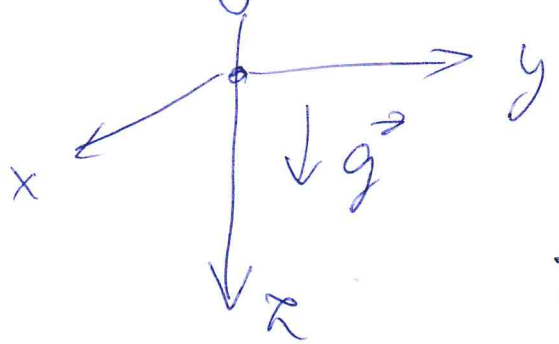
Например, силы тяжести, действующие на 1 и 2-ю частицы равны, Соответственно: $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 g \end{pmatrix}$, $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow U_{грав} = m_1 g z_1 + m_2 g z_2$$

$$-\frac{\partial U_{грав}}{\partial x_1} = (\vec{F}_1)_x = 0, \quad -\frac{\partial U_{грав}}{\partial y_1} = (\vec{F}_1)_y = 0$$

$$-\frac{\partial U_{грав}}{\partial z_1} = \left(\vec{F}_1\right)_z = -m_1 g.$$

Поэтому функциональный вид U может зависеть от выбора осей координат. Если ось Oz в нашем примере направить <u>вниз</u> (то есть, вдоль $\vec{g}$), то $U_{грав}$ <u>поменяет знак</u>:

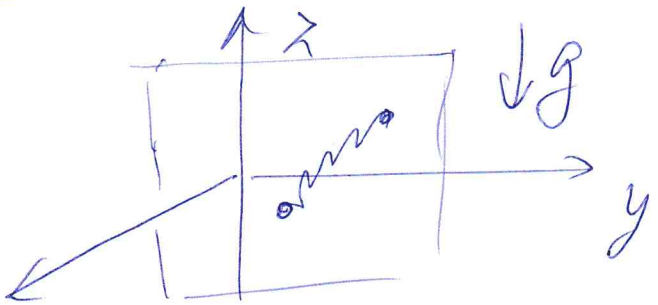


$\Rightarrow U_{грав} = -mgz$,

т.к. теперь $\left(\vec{F}\right)_z = mg = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-mgz\right)$.

<u>Пример 2</u>

Пусть теперь 2 частицы из прошлого примера движутся в <u>плоскости</u> $x=0$:



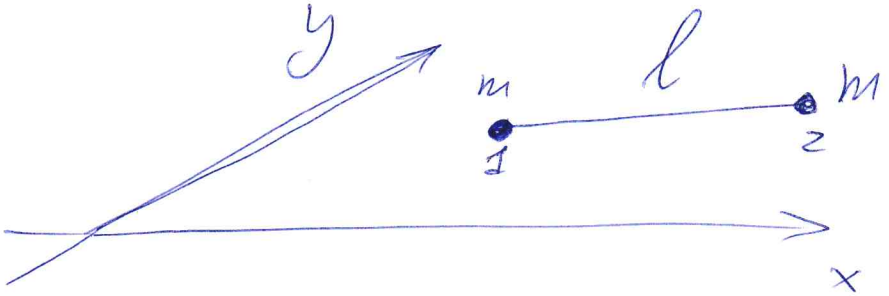
У системы осталось <u>4 степени свободы</u>.

Это простейший вид связи, который позволяет оставить декартовы координаты. Соответствующий лагранжиан получается из лагранжиана примера 1 фиксацией $x_1 \equiv 0 \equiv x_2$:

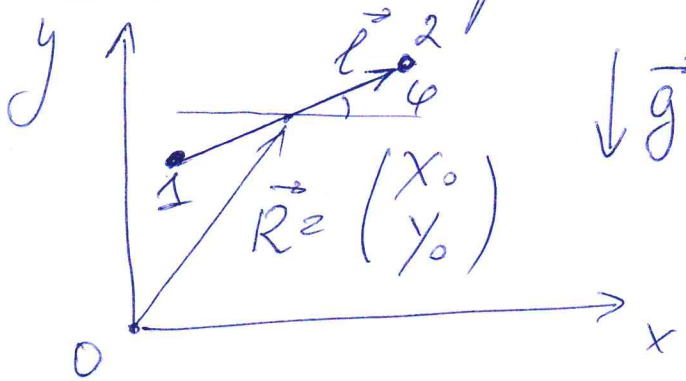
$$L(y_1, z_1, y_2, z_2) = \frac{m_1}{2}\left(\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \frac{m_2}{2}\left(\dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right] - m_1 g z_1 - m_2 g z_2.$$

Пример 3

2 частицы в плоскости связаны жёстким невесомым стержнем. Для простоты возьмём равные массы $m_1 = m_2 = m$. Здесь 3 степени свободы и декартовы координаты обеих частиц неудобны в качестве обобщённых.



Выберем координаты так: 2 декартовых координаты X_0 и Y_0 центра масс системы (при $m_1=m_2$ это <u>середина</u> стержня) и угол φ между вектором $\vec{l}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$ и положительным направлением оси OX:



$\downarrow \vec{g}$

После этого надо выразить <u>декартовы координаты</u> через <u>обобщённые</u>:

$$X_1 = X_0 - \frac{l}{2}\cos\varphi \qquad X_2 = X_0 + \frac{l}{2}\cos\varphi$$

$$Y_1 = Y_0 - \frac{l}{2}\sin\varphi \qquad Y_2 = Y_0 + \frac{l}{2}\sin\varphi$$

и подставить в формулы для кинетической и потенциальной энергии:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2\right) + \frac{m}{2}\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2+\dot{x}_0 l\dot{\varphi}\sin\varphi-\dot{y}_0 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$+\frac{m}{2}\left(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2-\dot{x}_0 l\dot{\varphi}\sin\varphi+\dot{y}_0 l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)=$$

$$= \underbrace{m(\dot{X}_0^2+\dot{Y}_0^2)}_{T_0} + \underbrace{\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{4}}_{T_{вращ}}$$

Итак, $T_{кин}$ есть сумма кинетической энергии центра масс $T_0 = \frac{1}{2}(2m)(\dot{X}_0^2+\dot{Y}_0^2)$

Полная масса системы

и энергии вращения вокруг центра масс:

$$T_{вращ} = 2\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{4}$$

Здесь $v_{вр} = \frac{l}{2}\dot{\varphi}$ – скорость при вращении по ~~радиу~~ окружности радиуса $l/2$ с угловой скоростью $\dot{\varphi}$.

$$U_{грав} = mgy_1 + mgy_2 = 2mgY_0$$

Итог:

$$L(X_0, Y_0, \varphi, \dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{\varphi}) = m(\dot{X}_0^2+\dot{Y}_0^2) + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{4} - 2mgY_0.$$

L не зависит от X_0 (только от $\dot{X}_0$), т.е. X_0 – циклическая координата $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_{X_0} = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_0} = m\dot{X}_0 = Const$ – импульс системы вдоль Ox сохраняется, т.к. вдоль Ox

не действуют внешние силы.

L не зависит от координаты $\varphi \Rightarrow$

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} = const$$ – сохранение момента импульса (вектор $\vec{J}$ плоскости xOy). $\Rightarrow \dot{\varphi} = const \Rightarrow \varphi = \omega t + \varphi_0$

L не зависит явно от t $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$

$\Rightarrow$ Сохраняется механическая энергия системы:

$$\mathcal{E} = \dot{x}_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} + \dot{y}_0 \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = T_{кин} + U$$

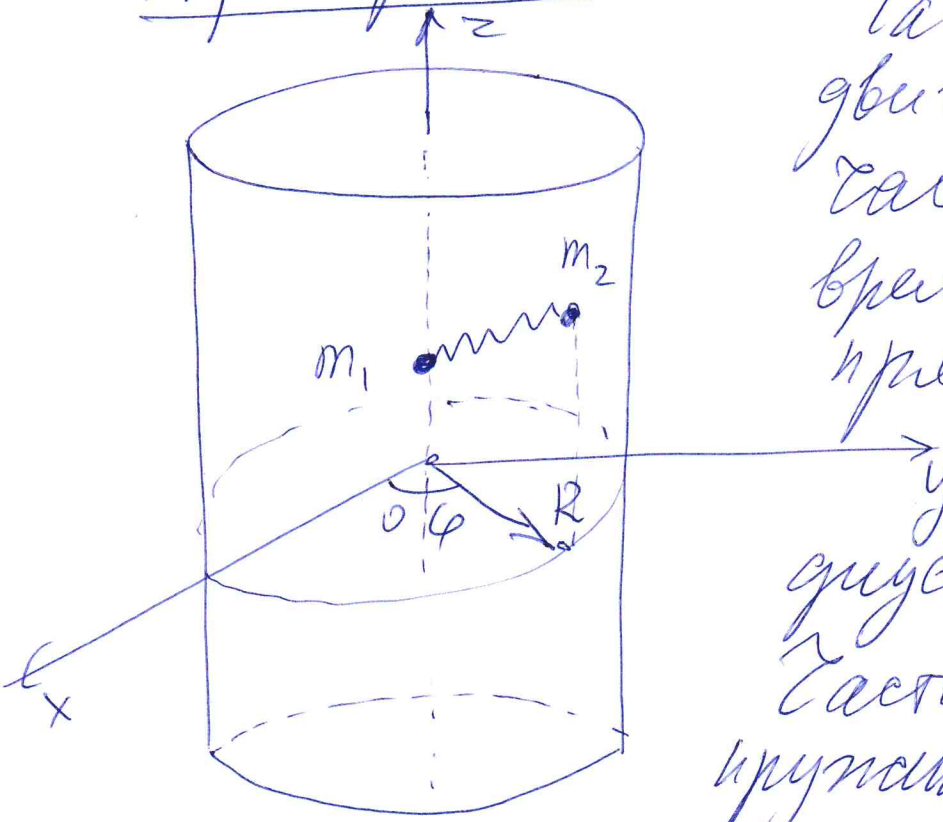
$\boxed{\text{Зам.}}$ Можно было выбрать в качестве обобщённых координат декартовы координаты одной из частиц и угол φ, например, x_1, y_1 и φ. Тогда

$$x_2 = x_1 + l\cos\varphi$$
$$y_2 = y_1 + l\sin\varphi.$$

Но при таком выборе $T_{кин}$ уже не будет диагональной квадратичной

формой обобщённых скоростей, =10= все уравнения примут сложный вид. Кроме того, появится явная зависимость от φ и увидеть интеграл движения, отвечающий сохранению момента импульса будет не просто.

Пример 4.



Частица m_1 движется по оси Oz, частица m_2 – все время на поверхности прямого кругового цилиндра радиуса R с осью Oz. Частицы соединены пружиной жёсткости k.

У системы 3 степени свободы. Выберем обобщённые координаты: Декартову z_1 для m_1, цилиндрические координаты для m_2.

$x_2 = R\cos\varphi \quad y_2 = R\sin\varphi$

$$T_{кин} = T_1 + T_2 = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2\right) =$$

$$= \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}_2^2\right)$$

$$U_{упр.} = \frac{k}{2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)^2 = \frac{k}{2}\left((z_1 - z_2)^2 + R^2\right)$$

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{z}_2^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{2}(z_1 - z_2)^2$$

(константу $\frac{k}{2}R^2$ в $U_{упр.}$ можно опустить)

Здесь сразу верны <u>2 интеграла</u> движения: φ – циклическая координата $\Rightarrow$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 R^2 \dot{\varphi} = \mathcal{J} = Const$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = T_{кин} + U_{упр} = Const.$

Но в системе $\exists$ еще <u>третий</u> интеграл – полный импульс вдоль оси Oz. Это следствие того, что L зависит только от <u>разности</u> $z_1 - z_2$.

Введём переменные

$$z_+ = z_1 + z_2$$
$$z_- = z_1 - z_2 \Rightarrow \quad z_1 = \frac{z_+ + z_-}{2}$$
$$z_2 = \frac{z_+ - z_-}{2}$$

Тогда Лагранжиан примет вид:

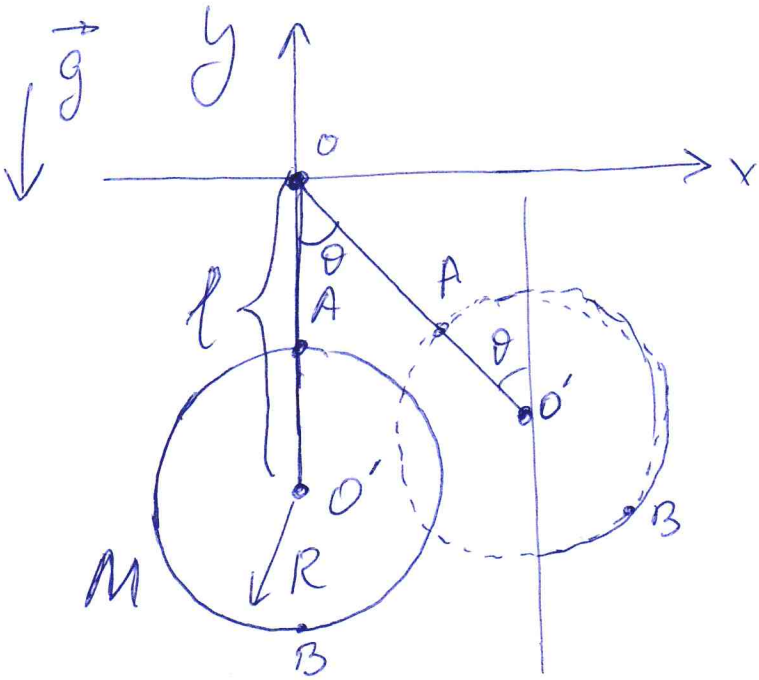
$$L = \frac{(m_1+m_2)}{8}\left(\dot{z}_+^2 + \dot{z}_-^2\right) + \frac{(m_1-m_2)}{4}\dot{z}_+\dot{z}_- +$$
$$+ \frac{m_2}{2}R^2\dot{\varphi}^2 - \frac{k}{2}z_-^2 .$$

Лагранжиан не зависит от z_+ $\Rightarrow$

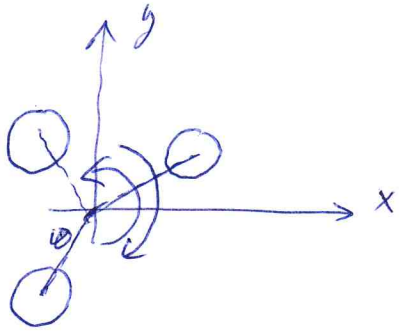
$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_+} = \frac{(m_1+m_2)}{4}\dot{z}_+ + \frac{m_1-m_2}{4}\dot{z}_- =$$
$$= \frac{m_1}{2}\dot{z}_1 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2 = P_z = \underline{const}$$

~~Ти~~ z-компонента полного импульса системы.

Пример 5



Однородный ~~обруч~~ обруч массы M жестко прикреплен к стержню длины l. Стержень может свободно вращаться вокруг точки O так, что и он сам и обруч все время находятся в плоскости XOY. Это модель маятника старинных настенных часов, только в отличие от маятника, наш стержень может совершать полные обороты вокруг точки O:

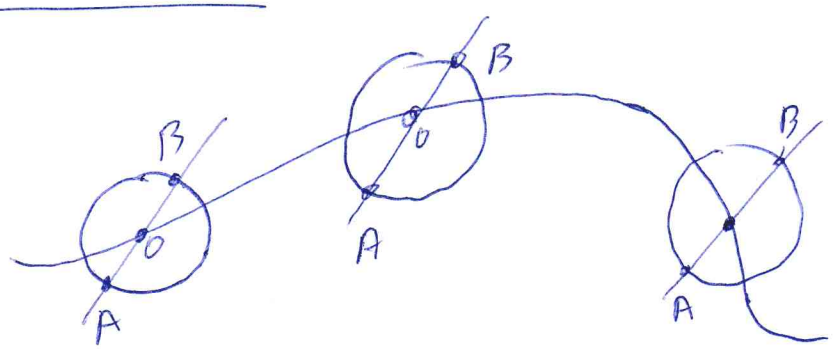


Массой стержня пренебрегаем по сравнению с массой обруча M.

Система имеет 1 степень =14= свободы. В качестве обобщенной координаты выберем угол θ между стержнем OO' и отрицательным направлением оси OY (см. рисунок на стр. =13=).

Для построения Лагранжиана нам нужна кинетическая и потенциальная энергии.

Наша система представляет собой твёрдое тело, которое движется непоступательно. Поступательным движением твёрдого тела называется такое его перемещение в пространстве, при котором любая прямая, проходящая через точки тела, переносится параллельно самой себе:



При поступательном движении <u>все точки</u> твердого тела имеют одинаковые вектора скоростей $\vec{v}$ и

его кинетическая энергия может быть записана как кинетическая энергия центра масс: $T_{кин} = \frac{M\vec{v}^2}{2}$.

Если движение <u>непоступательное</u>, как в нашем примере (прямая AO' <u>не перемещается</u> параллельно самой себе), то к энергии движения центра масс надо добавить кинетическую <u>энергию вращения</u> вокруг этого центра масс.

Для однородного обруча, все точки которого находятся на расстоянии R от центра масс O', эта энергия находится просто:

$$T_{вращ.} = \frac{M(R\omega)^2}{2},$$

где ω – угловая скорость вращения.

Для нахождения ω надо определить угол $\Delta\psi$, на который за время Δt повернётся обруч относительно какого-нибудь <u>фиксированного</u> направления в пространстве (например, в нашей задаче это ~~угла~~ угол между OO' и осью $OY \Rightarrow \Delta\psi = \Delta\theta$), а затем вычислить предел $\Delta t \to 0$: $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta t} = \dot{\psi}$.

В <u>нашем</u> примере $\omega = \dot{\theta}$.

Заметим однако, что если бы обруч не был "прибит" к стержню в т. A, а мог бы ещё вращаться относительно стержня вокруг точки O' (как велосипедное колесо), то $\omega = \dot{\theta} \pm \dot{\varphi}$, где φ – угол этого нового поворота (новая <u>степень свободы</u>!).

Итак, кинетическая энергия нашей системы:

$$T_{кин} = \frac{M}{2}\left(\dot{X}_{O'}^2 + \dot{Y}_{O'}^2\right) + \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{2}$$

Осталось выразить через обобщенную координату θ декартовы координаты центра масс O':

$$X_{O'} = l \sin\theta \quad Y_{O'} = -l\cos\theta. \quad (*)$$

Здесь мы выбрали точку отсчета θ в положении, когда O' в крайней нижней точке (положение равновесия).

Тут надо соблюдать аккуратность, поскольку неправильная параметризация приведет к ошибке в потенциальной энергии. Отметим, что угол $\theta \in (-\infty, +\infty)$, поскольку возможны вращения стержня вокруг O.

Если считать $\theta \in (-\pi, \pi]$ или $\in [0, 2\pi)$, то будет ошибка в фазовом портрете эффективной системы.

Пользуясь $(*)$ получаем

$$\dot{X}_{O'}^2 + \dot{Y}_{O'}^2 = l^2\dot{\theta}^2.$$

Итог: $T_{кин} = \frac{M}{2}(l^2+R^2)\dot{\theta}^2$.

Потенциальная энергия твёрдого тела в <u>однородном</u> поле тяжести определяется координатами центра масс:

$$U_{грав} = Mg\,y_{O'} = -Mgl\cos\theta$$

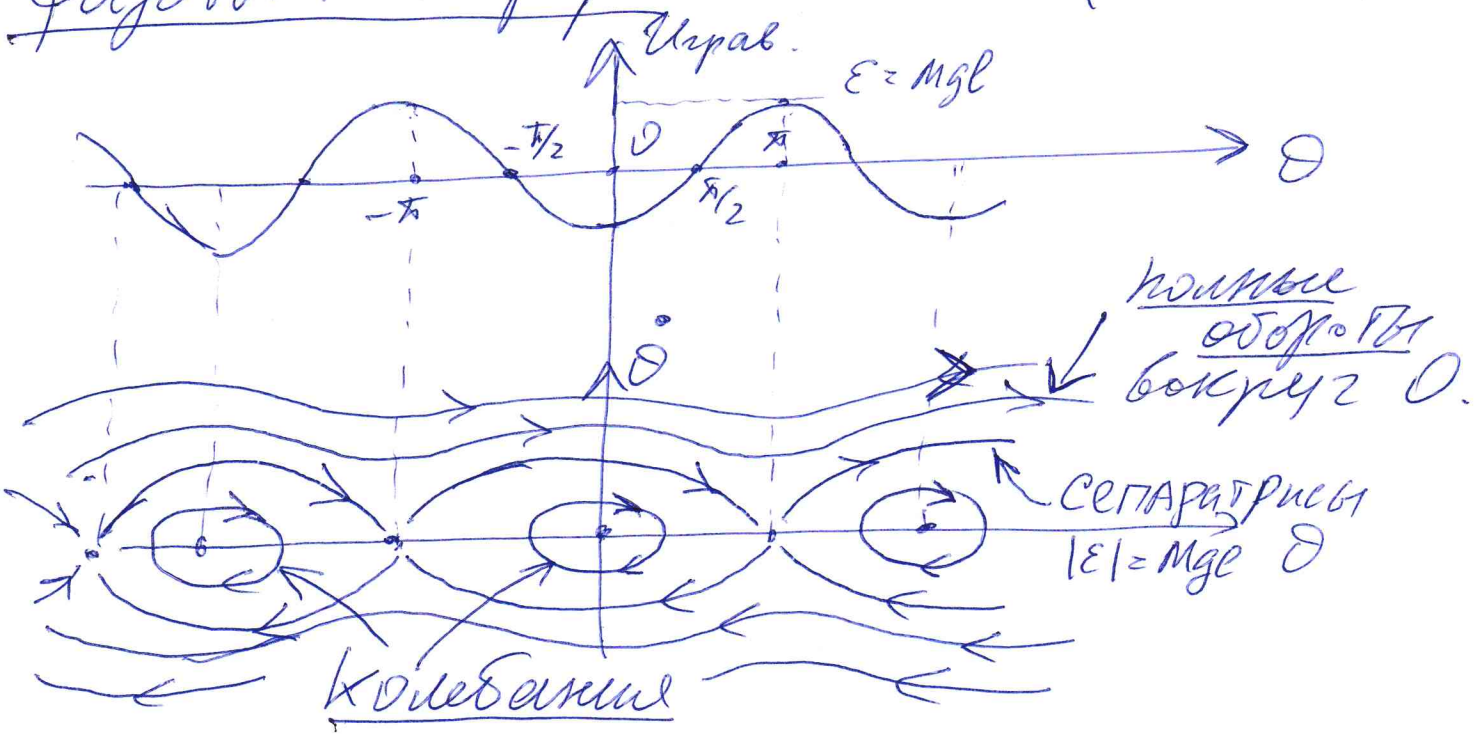
Знак важен!

С увеличением θ $U_{грав}$ <u>растёт</u>.

Итак: $\boxed{L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{M}{2}(l^2+R^2)\dot{\theta}^2 + Mgl\cos\theta}$

Энергия $\mathcal{E} = T+U = \frac{M}{2}(R^2+l^2)\dot{\theta} - Mgl\cos\theta$

<u>Фазовый портрет</u> по θ: ($\mathcal{E}=const$)



Уравнение Эйлера - Лагранжа: =19=

$$L_\theta = \left(\frac{d}{dt}\circ\frac{\partial}{\partial\dot\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right)L = 0$$

$$\Downarrow$$

$$m(R^2+l^2)\ddot\theta + Mgl\sin\theta = 0$$

$$\ddot\theta + \frac{gl}{l^2+R^2}\sin\theta = 0.$$

При <u>малых</u> колебаниях в рабочие точки равновесия $\theta_k = 2\pi k$: $\theta = \varphi + 2\pi k$

(φ - мало) $\ddot\theta = \ddot\varphi$ $\sin\theta \approx \varphi$

получаем <u>гармонические колебания</u>

$$\ddot\varphi + \frac{gl}{l^2+R^2}\varphi = 0$$

Угловая частота $\omega^2 = \frac{gl}{l^2+R^2}$.

При $R \to 0$ получаем обычную угловую частоту математического маятника длины l : $\omega^2 = \frac{g}{l}$.