Лекция 7

Более общие вариационные задачи.

В современной теоретической и математической физике, не говоря уже о прикладных задачах, встречаются модели, приводящие к более общим вариационным задачам. Действие в некоторых моделях зависит от старших производных по времени ($\ddot{q}(t)$ и далее), а в других не зависит даже от скоростей (модели с множителями Лагранжа). В некоторых случаях экстремум действия приходится искать на функциях, чьи значения в начальный и конечный моменты времени не фиксируются (например, в модели замкнутой струны). Мы обсудим и проиллюстрируем на примерах такие задачи.

1 Вариационная задача со старшими производными.

Будем искать экстремаль функционала

$$\boxed{S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t))\, dt} \qquad (1)$$

Его дифференциал имеет вид:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta S[\delta q(t)] = &\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q(t)\, dt + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \delta \dot{q}(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \delta q(t) \Big|_{t_1}^{t_2} \end{aligned}} \qquad (2)$$

Вычисление этого дифференциала — упражнение на интегрирование по частям. Приведем его в деталях:

$$\delta S[\delta q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\delta q, \dot q + \delta \dot q, \ddot q + \delta \ddot q)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,\ddot q)\,dt + o(\|\delta q\|)$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\delta \ddot q(t) \right\} dt}_{} \qquad (*)$$

Здесь мы работаем с функциями $q(t) \in C^2[t_1, t_2]$, и полагаем, что условие малости $\|\delta q\|$ гарантирует малость $|\delta q(t)|, |\delta \dot q(t)|, |\delta \ddot q(t)|$ $\forall\, t \in [t_1, t_2]$.

Преобразуем выражение $(*)$ для δS, интегрируя несколько раз по частям:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q(t) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q(t) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot q}\right)\delta \dot q(t) \right) dt +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\delta \dot q(t) \right\}\Bigg|_{t_1}^{t_2} = \left(\text{еще раз интегрируем по частям последнее слагаемое в интеграле}\right)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot q} \right)\delta q(t)\,dt +$$

$$+ \left\{ \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot q} \right)\delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \ddot q}\delta \dot q(t) \right\}\Bigg|_{t_1}^{t_2},$$ что

совпадает с формулой (2).

Итак, экстремали функционала (1) являются решениями дифура 4-го порядка

$$\boxed{\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial}{\partial\ddot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}} + \frac{\partial}{\partial q}\right)L(q,\dot{q},\ddot{q}) = 0} \quad (3)$$

Для $\exists!$ решения этого уравнения (в предположении, что его можно разрешить относительно старшей производной $\dddot{q}$) нужно задать 4 начальных условия:

$$q(t_0),\ \dot{q}(t_0),\ \ddot{q}(t_0) \text{ и } \dddot{q}(t_0).$$

Вариационная задача предлагает взамен задать 4 граничных условия: по два на каждой границе $t=t_1$ и $t=t_2$. Вид этих условий зависит от выбора пространства функций, на котором ищется экстремаль.

а) Функции $q(t)$ имеют фиксированные значения и фиксированные производные на границах:

$$\boxed{q(t_1)=q_1,\ q(t_2)=q_2;\ \dot{q}(t_1)=\dot{q}_1,\ \dot{q}(t_2)=\dot{q}_2} \quad (4a)$$

В этом случае $\delta q(t)\big|_{t_{1,2}} = \delta\dot{q}(t)\big|_{t_{1,2}} = 0$ и граничные члены в $\delta S[\delta q]$ (2) автоматически зануляются. Задачу об экстремали решаем с гран. условиями (4а).

б) Функции $q(t)$ имеют фиксированные значения на границах, но их производные на границах произвольны

$$\boxed{q(t_1)=q_1,\ q(t_2)=q_2;\ \dot{q}(t_1),\dot{q}(t_2) - \forall} \quad (4бi)$$

В этом случае $\delta q(t)\big|_{t_{1,2}} = 0$ и последнее граничное слагаемое в (2) занулеется, но первое граничное слагаемое, в силу произвольности $\delta\dot{q}(t_1)$ и $\delta\dot{q}(t_2)$ занулеется если, и только если

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\bigg|_{t=t_1} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\bigg|_{t=t_2} = 0} \qquad (4в2)$$

Задача об экстремали решается с парой гран. условий (4в1) и парой гран. условий (4в2).

в) Функции $q(t)$ могут иметь произвольные значения на границах, но их производные на границах зафиксированы:

$$\boxed{q(t_1), q(t_2) - \forall\ ;\ \dot{q}(t_1) = \dot{q}_1\ ,\ \dot{q}(t_2) = \dot{q}_2} \qquad (4с1)$$

В этом случае граничные члены в (2) дают еще пару условий:

$$\boxed{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right)\right)\bigg|_{t=t_{1,2}} = 0,} \qquad (4с2)$$

дополняющих (4с1) до четверки гран. условий для поиска экстремали — решения дифура (3).

Понятно, что можно комбинировать граничные условия б) и в), выбирая разные типы условий на разных границах.

На семинаре мы проиллюстрируем такие вариационные задачи на примере задачи о прогибе балки

2 Задачи на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

Переходя от Ньютонова формализма к лагранжеву с помощью принципа Даламбера, мы удачно поборолись с силами реакции связей. В лагранжевом формализме их нет, они не мешают решать уравнения Эйлера-Лагранжа. Однако иногда их все же полезно знать (чтобы мосты не ломались, например).

Рассмотрим метод восстановления сил реакции связей методом множителей Лагранжа.

Пусть, как в лекции, у нас имеется система n материальных точек. Их радиус-векторы $\vec{r}_i$, $i=1\ldots n$, и на них, помимо потенциальных сил, действуют силы реакции идеальных связей $\vec{N}_i$.

Пусть на систему точек наложено $3n-N$ идеальных связей вида:

$$\boxed{f_a(\vec{r}_i, t) = 0, \quad a=1,\ldots,3n-N.} \qquad (5a)$$

(считаем связи f_a функционально независимыми), которые можно явно разрешить с использованием параметров q_α, $\alpha=1\ldots N$ — обобщенных координат системы:

$$\boxed{\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_N, t)}, \qquad (5в)$$

так что $f_a(\vec{r}_i(q,t),t) \equiv 0$. После наложения связей у системы осталось N степеней свободы.

Утверждается, что силы реакции идеальных связей можно представить в виде

$$\boxed{\vec{R}_i = \sum_{a=1}^{3n-N} \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i},} \qquad (6)$$

выбрав подходящие λ_a, причем параметры λ_a, называемые <u>множителями Лагранжа</u> определяются единственным образом.

Действительно, в системе (6) $3n$ уравнений, она линейна по $(3n-N)$ переменным λ_a, и прямоугольная $(3n-N)\times 3n$ матрица $\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}$, стоящая при λ_a, имеет максимальный возможный ранг: $\mathrm{rk}\left\|\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}\right\| = 3n-N$ (т.к. связи f_a функционально независимы). При этом у матрицы $\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}$ есть N правых 0-векторов $\delta_\alpha \vec{r}_i$:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}, \delta_\alpha \vec{r}_i\right) = 0 \qquad \alpha = 1 \dots N$$

Здесь $\{\delta_\alpha \vec{r}_i\}_{\alpha=1\dots N}$ — некоторый базис касательных векторов к поверхности связей (время t — фиксировано в условиях связей). Действительно, ведь $\frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}$ ортогональны к этой касательной поверхности.

В лекции 4 векторы $\delta_\alpha \vec{r}_i$ мы называли виртуальными перемещениями. Принцип Даламбера утверждает, что

$$\boxed{(\vec{N}_i, \delta_\alpha \vec{r}_i) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N, \qquad (7)}$$

и эти условия являются условиями разрешимости системы относительно λ_a. Итак, ( ) гарантирует однозначную разрешимость (6).

Заметим, что выражения (6) для сил реакции имеют потенциальный вид:

$$\boxed{\vec{N}_i = -\frac{\partial U_{реакц.}}{\partial \vec{r}_i}, \text{ где } U_{реакц.} = -\sum_{a=1}^{3n-N} \lambda_a f_a(\vec{r}_i, t)}$$

и λ_a рассматриваются как независимые от $\vec{r}_i$ переменные

Итак, вместо ограничения числа переменных в задаче с $\vec{r}_i$ до q_α, мы расширяемся с $\vec{r}_i$ до $\{\vec{r}_i\} \cup \{\lambda_a\}$, и рассматриваем мех. систему с лагранжианом

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, \lambda_a, t) &= L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) - U_{реакц} = \\ &= L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \sum_a \lambda_a f_a(\vec{r}_i, t) \qquad (8) \end{aligned}}$$

При этом уравнения Эйлера-Лагранжа для переменных λ_a:

$$\mathcal{L}_{\lambda_a} := \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_a} = \underbrace{-f_a(\vec{r}_i, t) = 0}_{} \quad (9_a)$$

вовсе не являются дифурами, а воспроизводят условия связей.

Уравнения для переменных $\vec{r}_i$ принимают вид:

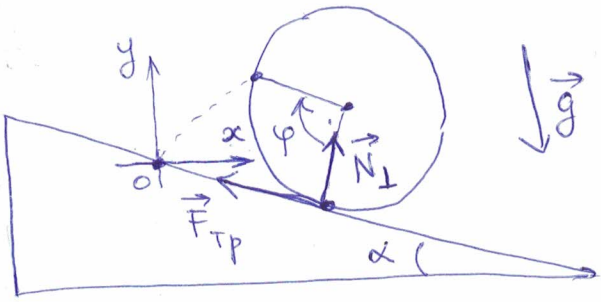
$$\mathcal{L}_{\vec{r}_i} := \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{r}_i} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \sum_a \lambda_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}_i}} \quad (9в)$$

Они разрешимы и относительно λ_a (как система линейных уравнений), и относительно $\vec{r}_i(t)$ (как система дифуров 2-го порядка на поверхности связей $f_a = 0$). После определения λ_a силы реакции связей определяются из формулы (6).

Для иллюстрации метода разберем задачу о колесе на наклонной плоскости из Семинара 5.



Колесо скатывается под действием силы тяжести ($\vec{g}$) с наклонной плоскости (α) без проскальзывания. Масса колеса **M** распределена равномерно по ободу. Радиус колеса **R**. Координаты центра колеса (он же – центр масс) – (x, y). Угол поворота колеса – φ.

Условие непроскальзывания накладывает на них связи:

$$\begin{cases} f_1 = x - R\varphi\cos\alpha = 0 \\ f_2 = y + R\varphi\sin\alpha = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Лагранжиан свободного колеса в поле тяжести:

$$L = \frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + \frac{M}{2}R^2\dot{\varphi}^2 - \underbrace{Mgy}$$

потенциальная энергия, как будто вся масса колеса M сосредоточена в центре масс.

Лагранжиан с множителями Лагранжа:

$$\boxed{\mathcal{L} = L + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2}$$

Уравнения Э.-Л. по λ_1 и λ_2 восстанавливают условия связей (10).

Уравнения Э.-Л. по переменным x, y, φ:

$$\mathcal{L}_x: \quad M\ddot{x} = \lambda_1$$

$$\mathcal{L}_y: \quad M\ddot{y} + Mg = \lambda_2$$

$$\mathcal{L}_\varphi: \quad MR^2\ddot{\varphi} + \lambda_1 R\cos\alpha - \lambda_2 R\sin\alpha = 0$$

С учётом связей (10) решаем $\mathcal{L}_\varphi$ относительно φ:

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{g}{2}\frac{\sin\alpha}{R}},$$

откуда вычисляем множители Лагранжа

$$\lambda_1 = \frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{2}, \quad \lambda_2 = Mg\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)$$

Как нетрудно посчитать, формула (6) даёт выражения для проекций силы реакции $\vec{N}$ на оси $O\vec{x}$ и $O\vec{y}$:

$$N_x = \lambda_1, \quad N_y = \lambda_2$$

Для удобства интерпретации силу $\vec{N}$ стоит разложить в проекции на наклонную плоскость по которой катится колесо — $N_{\parallel}$, и на нормаль к ней — $N_{\perp}$

$$N_{\parallel} = N_x\cos\alpha - N_y\sin\alpha = -\frac{Mg\sin\alpha}{2}$$

$$N_{\perp} = N_x\sin\alpha + N_y\cos\alpha = Mg\cos\alpha$$

Очевидно $N_{\parallel} = -F_{тр}$ — сила трения колеса о плоскость, $N_{\perp}$ — сила реакции плоскости.

В задаче была еще одна независимая переменная — φ. Формула (6) даёт выражение и для силы реакции, относящейся к этой переменной:

$$N_{\varphi} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\right) = R\,\frac{Mg\sin\alpha}{2} = R\cdot F_{тр}$$ —

момент силы трения относительно центра колеса