Задание 7

1 а) Функционал

$$S[y(x)] = \int_0^1 \{(y''(x))^2 + 5(y'(x))^2 + 4y^2(x)\}\,dx$$

задан на пространстве функций $y(x) \in C^\infty[0,1]$ с фиксированными граничными условиями вида

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = -3.$$

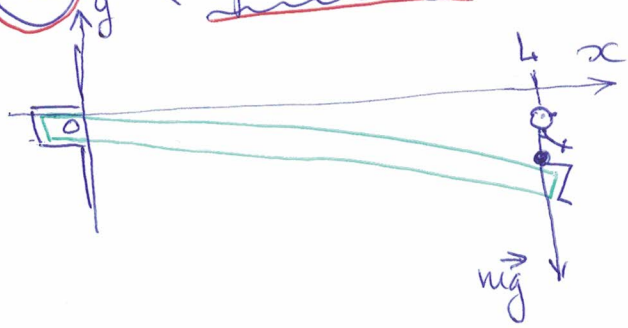
Найдите экстремум этого функционала.

б) На том же пространстве функций найдите экстремум функционала

$$U[y(x)] = S[y(x)] + 6y'(1).$$

---

2 (Трамплин)



Невесомую упругую балку закрепили горизонтально левым концом в начале координат. Правый конец нагрузили весом mg.

Длина балки – L. Определите профиль балки, полагая, что её потенциальная энергия деформации такая же, как в первой задаче Семинара 7 (с константой упругой деформации – $\varkappa$).

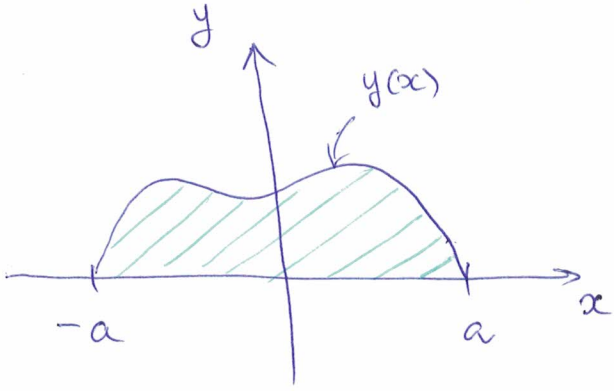
3 Частица массы $m=1$ скользит без трения по сфере радиуса R в однородном поле тяжести с ускорением свободного падения $\vec{g}$. (Это — модель сферического маятника).

Определите силу реакции $\vec{N}$, действующую со стороны сферы на частицу. Для этого воспользуйтесь методом множителей Лагранжа, введя в лагранжиан свободной частицы связь $f(\vec{r}) = \vec{r}^{\,2} - R^2 = 0$

Выразите силу реакции $\vec{N}$ в виде функции от координат частицы и её энергии.

---

4 (Задача Дидоны)



Среди кривых $y(x)$ длины $l > 2a$ найдите кривую, которая вместе с отрезком $[-a, a]$ ограничивала бы наибольшую площадь.

Поэтапно:

а) Найдите общее решение дифура этой вариационной задачи (в нём множитель Лагранжа — одна из констант)

б) Получите соотношение между множителем Лагранжа λ и параметрами задачи a и l.

в) Найдите явное решение задачи в случае $l = \frac{\pi a}{\sqrt{2}}$

Примечание: Сравните дифур этой задачи с дифуром задачи о плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре (Семинар 6).