Семинар 7

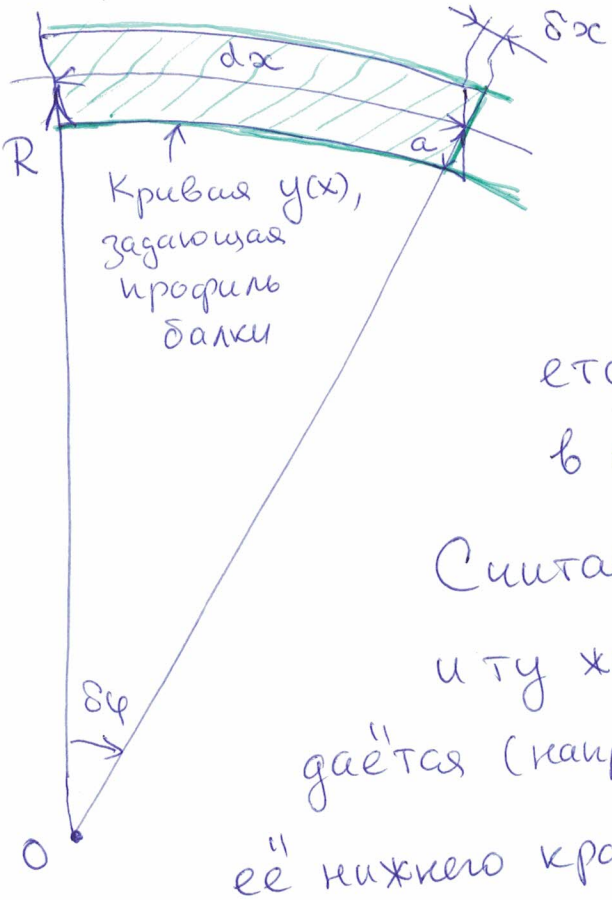
Примеры вариационных задач II.

1 Вариационная задача со старшими производными.

Задача о прогибе балки.

Рассмотрим балку в однородном поле тяжести. Изначально она лежала горизонтально, опираясь на концы, но под действием силы тяжести прогнулась вниз. Считаем, что прогиб незначителен, и в балке возникают силы упругой деформации изгиба, компенсирующие действие силы тяжести. Это задача из статики. Кинетической энергии у балки нет, поэтому принцип наименьшего действия утверждает, что балка примет конфигурацию, в которой её потенциальная энергия имеет экстремум. Этот экстремум будет минимумом (в задачах статики устойчивому положению равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии). А у действия этот экстремум будет максимумом ($S = -U$), что ещё раз подчёркивает, что в принципе наименьшего действия мы интересуемся любыми экстремалями, не выясняя, минимумы они или максимумы.

Итак, оценим в 1-м приближении потенциальную энергию балки.



Рассмотрим небольшой отрезок балки длиной dx (см. Рис.). Под действием силы тяжести балка искривляется. R – радиус кривизны балки в окрестности ее отрезка dx.

Считаем, что балка везде имеет одну и ту же толщину $2a$, ее профиль задаётся (например) кривой $y(x)$ – высотой ее нижнего края.

Кусок балки dx виден из центра O касательной к нему окружности под углом $\delta\varphi$:

$$\boxed{dx = R\,\delta\varphi}$$

Под действием силы тяжести правый, висящий край куска балки снизу сжимается, а сверху растягивается на величину $\boxed{\delta x = a\,\delta\varphi}$ (см. Рис)

Относительная деформация слоя балки

$$\Delta = \frac{\delta x}{dx} = \frac{a}{R} \sim R^{-1}$$

Энергия упругой деформации куска балки единичной длины (т.е. линейная плотность энергии деформации)

$$U_{упр} = \frac{k\Delta^2}{2} \sim R^{-2}, \text{ где}$$

k – коэфф. упругости, зависящий от материала балки.

Из анализа вспоминаем формулу кривизны кривой $y(x)$:

$$\boxed{R^{-1}(x) = \frac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} \cong y''(x)}$$ в первом приближении, когда $y'(x) \ll 1$.

Получаем, что энергия упругой деформации куска балки dx

$$\delta U_{упр}(x) \cong \frac{\varkappa}{2}(y''(x))^2 dx,$$

где $\varkappa$ – коэффициент, зависящий от толщины балки и от материала, из которого она сделана.

Энергия этого же куска в поле тяжести

$$\delta U_{теж}(x) = \rho g y(x)\, dx,$$

где ρ – линейная плотность балки.

Предполагая балку однородной, мы считаем, что ρ и $\varkappa$ – константы, не зависящие от x.

Функционал потенциальной энергии балки имеет вид:

$$\boxed{U[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\varkappa y''^2}{2} + \rho g y\right) dx} \quad (1)$$

С точностью до переобозначений $x \mapsto t$, $y(x) \mapsto q(t)$ это функционал действия $S[q(t)]$ (1) из Лекции 7. Его экстремаль является решением дифура (3) (стр 3. Лекции 7). В данном случае это:

$$\boxed{y'''' + \frac{\rho g}{\varkappa} = 0} \qquad (2)$$

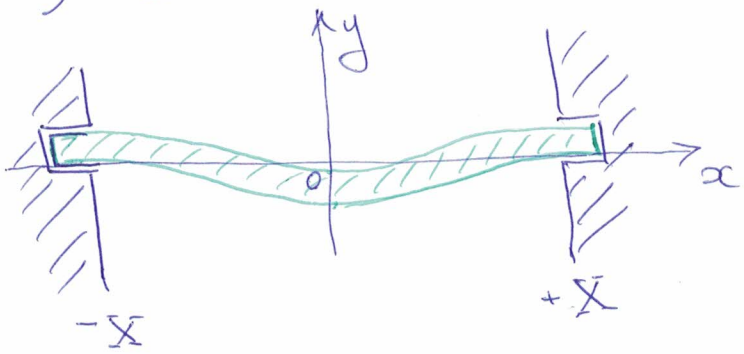
Его общее решение:

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{\varkappa}\frac{1}{4!}x^4 + P_3(x),} \qquad (3)$$

где $P_3(x)$ произвольный многочлен 3-й степени по x.

Форма балки определяется тем, что происходит с её концами.

а) Балка — межэтажное перекрытие



Концы балки горизонтально вбетонированы в стены.

Выбирая систему отсчёта так, что левый/правый конец балки имеют координату $-X/+X$ по оси $O\vec{x}$ и 0 по оси $O\vec{y}$, имеем граничные условия

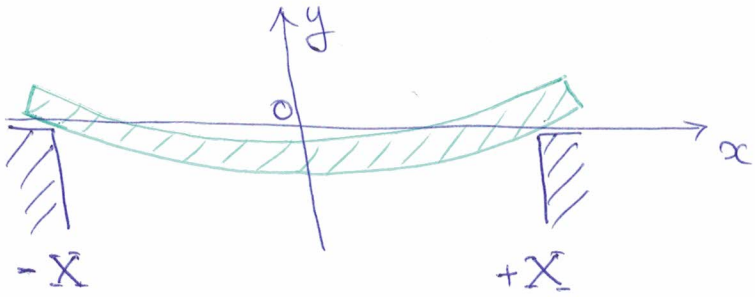
$$\boxed{y(\pm X) = 0, \quad y'(\pm X) = 0} \qquad (4a)$$

Это граничные условия типа (4а) из Лекции 7 (см стр 3)

Многочлен 4-й степени по x, у которого при $x = \pm X$ имеются нули 2-го порядка, это

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}(x-X)^2(x+X)^2} \qquad (5)$$

б) Балка – мостик



Концы балки свободно лежат на двух опорах

Опять выберем систему отсчёта, где края балки имеют координаты $\pm X$ по оси $O\vec{x}$, и 0 по оси $O\vec{y}$ (мы на самом деле учитываем таким образом симметрию задачи: $y(x)$ будет чётной функцией x)

$$\boxed{y(\pm X) = 0, \quad y'(\pm X) - \forall} \quad \text{– наклон концов произволен} \qquad (6а)$$

Это граничные условия типа (4в1) (см. Лекцию 7, стр 3)

Недостающие 2 граничных условия даются формулой (4в2) /Лекция 7, стр 4/:

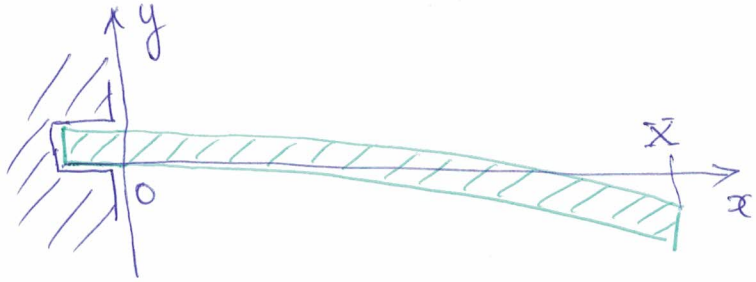
$$\frac{\partial}{\partial y''}\left(\frac{\varkappa y''^2}{2} + \rho g y\right)\Bigg|_{x=\pm X} = \boxed{\varkappa y''\Big|_{x=\pm X} = 0} \qquad (6в)$$

Удовлетворяющую этим условиям чётную функцию x^2, зануляющуюся при $x = \pm X$, легко определить, выбрав анзац:

$$\boxed{y(x) = -\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}(x^2 - X^2)(x^2 - \underset{\text{параметр}}{A}) \qquad A = 5X^2} \qquad (7)$$

Оказывается, $y''(\pm X) = 0$ при

в) <u>Балка – балкон</u>. Один конец балки вбетонирован горизонтально в стену, другой свободно висит.



В этом случае выберем началом координат вбетонированный конец балки. Имеем граничные условия

$$\boxed{y(0)=y'(0)=0\,,\quad y(X),\,y'(X)-\forall} \qquad (8a)$$

На левом конце это условия, как в варианте а), на правом конце – полная свобода

$\forall\,\delta y'(X)$ – как в (4в2) Лекции 7 (стр 4)

$$\frac{\partial}{\partial y''}\left(\frac{\varkappa y''^2}{2}+\rho g y\right)\Big|_{x=X}=0 \iff \boxed{y''(X)=0} \qquad (8в)$$

$\forall\,\delta y(X)$ – как в (4с2) Лекции 7 (стр 4)

$$\left(\frac{\partial}{\partial y'}-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y''}\right)\left(\frac{\varkappa y''^2}{2}+\rho g y\right)\Big|_{x=X}=0 \iff \boxed{y'''(X)=0} \qquad (8c)$$

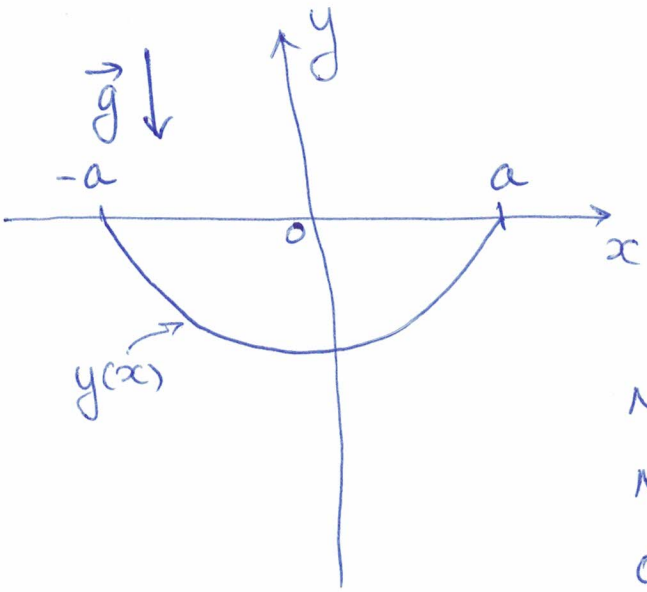
Выбирая в качестве анзаца полином, имеющий ноль 2-го порядка при $x=0$

$$\boxed{y(x)=-\frac{\rho g}{4!\,\varkappa}\,x^2\left(x^2-Ax+B\right)}$$

нетрудно проверить, что $y''(X)=y'''(X)=0$ для

$$\boxed{A=4X\,,\quad B=6X^2} \qquad (9)$$

2 Задача о цепной линии (задача с множителем Лагранжа)



Нерастяжимая, однородная массивная цепь массы m и длины ℓ висит в однородном поле тяжести. Её концы закреплены в точках a и $-a$ на оси $O\vec{x}$. Надо найти форму $y(x)$ цепной линии.

Это задача статическая: цепь принимает форму с минимальной потенциальной энергией. Она нерастяжима, поэтому энергии сил упругости у неё нет, есть только энергия в поле тяжести

$$\boxed{U_{тяж}[y(x)] = \int_{-a}^{a} \rho g\, y(x) \sqrt{1+y'^2}\, dx}$$

Здесь $\rho = \frac{m}{\ell}$ – линейная плотность цепи, $\sqrt{1+y'^2}\, dx = d\ell$ – инфинитезимальный элемент длины цепи.

Однако минимизировать функционал $U_{тяж}[y(x)]$ надо не на всех кривых $y(x)$, а только на кривых длины ℓ, то есть надо наложить условие:

$$\boxed{\ell = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (10)}$$

Поэтому, вводя множитель Лагранжа λ, мы формулируем задачу о поиске экстремума функционала

$$\boxed{U[y(x),\lambda] = \rho g \int_{-a}^{a} y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx + \lambda\left\{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\,dx - \ell\right\}}$$

(сравните с (8) на стр 7. Лекции 7)

Уравнение экстремали по переменной λ для этого функционала воспроизводит условие связи (10)

Вместо того, чтобы выписывать уравнение экстремали (оно же, уравнение Эйлера-Лагранжа) по переменной $y(x)$, заметим, что "лагранжиан" модели — подинтегральное выражение

$$L = \rho g\, y(x)\sqrt{1+y'^2(x)} + \lambda\sqrt{1+y'^2(x)} - \frac{\lambda\ell}{2a}$$

не зависит явно от переменной x (x — аналог времени t в механических задачах). Поэтому должна сохраняться "энергия" системы

$$"E" = y'\frac{\partial L}{\partial y'} + \underbrace{\lambda'\frac{\partial L}{\partial \lambda'}}_{\substack{\parallel \\ 0,\ \text{т.к. } \lambda' \text{ нет}}} - L = -\frac{\rho g\, y(x) + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$-E\sqrt{1+y'^2} = \lambda + \rho g y$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{dx = \pm\frac{E\,dy}{\sqrt{(\lambda+\rho g y)^2 - E^2}}} \quad (11)$$

Подстановка $\lambda + \rho g y(x) = E \operatorname{ch}\theta(x)$

позволяет проинтегрировать это уравнение:

$$\theta(x) = \frac{\rho g}{E} x + \theta_0, \text{ т.е.}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{E}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x + \theta_0\right) - \lambda} \quad (12)$$

Симметричные граничные условия $y(a) = y(-a) = 0$ фиксируют $\theta_0 = 0$, и

$$\boxed{\lambda = \frac{E}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a\right)}$$

Заметим, что если бы мы не ввели в задачу множитель Лагранжа λ, то у нас не было бы возможности выбором параметров θ_0 и E в общем решении (12) удовлетворить граничным условиям $y(a) = y(-a) = 0$: функционал $U_{тяж}[y(x)]$ при таких условиях граничных не имеет экстремали (сравните с задачей о мыльных пленках из Семинара 6).

Итак, фиксация граничных условий приводит решение (12) к виду

$$\boxed{y(x) = \frac{E}{\rho g}\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} x\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g}{E} a\right)\right)} \quad (13)$$

здесь, т.к. $y \le 0$ при $|x| < a$, то $E > 0$

Оставшийся параметр E необходим для выполнения условия связи (10)

Элементарное вычисление длины линии $y(x)$ даёт:

$$\boxed{\frac{2E}{\rho g}\, sh\left(\frac{\rho g}{E} a\right) = l}$$

Заменяя $E \longmapsto z = \frac{\rho g}{E} a$, получаем уравнение

$$\boxed{sh(z) = \frac{l}{2a} z}$$

которое при $E > 0$, т.е. при $z > 0$ разрешимо относительно z единственным образом, если только

$$\boxed{l > 2a}$$

Последнее условие является естественным требованием, чтобы длина l нерастяжимой цепи была больше расстояния $2a$ между точками закрепления её концов.