Квантовые матричные алгебры

Срок сдачи листка: 25 мая 2020

1. Операторы q-антисимметризации $A^{(k)}_{12\ldots k} = A^{(k)}(R_1, R_2, \ldots, R_{k-1})$ и q-симметризации $S^{(k)}_{12\ldots k} = S^{(k)}(R_1, R_2, \ldots, R_{k-1})$ (образы в R-матричном представлении примитивных идемпотентов алгебры Гекке, отвечающих соответственно одностолбцовым и однострочным диаграммам Юнга) задаются следующими рекуррентными формулами:

$$A^{(1)} = I, \qquad A^{(k+1)}_{12\ldots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q}\, A^{(k)}_{12\ldots k}\Big(q^k - k_q R_k\Big)A^{(k)}_{12\ldots k}, \quad k \geq 1,$$

$$S^{(1)} = I, \qquad S^{(k+1)}_{12\ldots k+1} = \frac{1}{(k+1)_q}\, S^{(k)}_{12\ldots k}\Big(q^{-k} + k_q R_k\Big)S^{(k)}_{12\ldots k}, \quad k \geq 1.$$

Напомним, что $R_i = R_{i\,i+1}$, где R является R-матрицей $GL(N)$ типа. Найдите явные выражения (в терминах q-антисимметризаторов и q-симметризаторов) для частичных R-следов $\mathrm{Tr}_{R(r+1\ldots k)}A^{(k)}$ и $\mathrm{Tr}_{R(r+1\ldots k)}S^{(k)}$, где $0 \leq r \leq k-1$.

Полезный совет. При расчетах стоит использовать формулы “q-арифметики”:

$$q^{-a}b_q + q^b a_q = (b+a)_q, \qquad q^a b_q - q^b a_q = (b-a)_q, \qquad a_q := \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}.$$

2. Рассмотрите RTT-алгебру $\mathcal{T}(R)$ для случая $N = 2$, выбрав в качестве R матрицу Дринфельда-Джимбо:

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}, \qquad R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

а) Получите явные выражения перестановочных соотношений между генераторами a, b, c и d.

б) Получите явное выражения для квантового детерминанта $\det_R T$.

в) Найдите обратную матрицу (антипод) для T. Для этого можно воспользоваться последней формулой 38 страницы в лекции про RTT-алгебру. Напомним, что матрица D, входящая в определение квантового следа, в рассматриваемом случае имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} q^{-3} & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

г) Убедитесь явным вычислением в справедливости соотношения $S(\det_R T) = 1/\det_R T$.

3. Пользуясь явными перестановочными соотношениями генераторов RTT-алгебры для $N = 2$ (пункт а) задачи 2), докажите, что линейное подпространство, образованное *однородными* полиномами по генераторам фиксированной степени m совпадает с линейной оболочкой *упорядоченных* мономов

$$a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}d^{k_4}, \quad k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = m, \quad k_i \geq 0.$$

Можо доказать, что упорядоченные мономы линейно независимы. Пользуясь этим обстоятельством, найдите размерности соответствующих линейных подпространств и сравните с коммутативным случаем.

4. Рассмотрим алгебру $\mathcal{L}(R)$ модифицированного уравнения отражений (квадратично-линейную), задаваемую R-матрицей $GL(N)$ типа:

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 - L_1R_{12}L_1R_{12} = R_{12}L_1 - L_1R_{12}, \qquad L = \|L_i^j\|.$$

Пусть V — N-мерное комплексное линейное пространство и набор N векторов $\{e_i\}_{1\le i\le N}$ является базисом V.

а) Докажите, что гомоморфизм ассоциативных алгебр $\rho : \mathcal{L}(R) \to \mathrm{End}(V)$, сопоставляющий генераторам L_i^j линейные операторы на V с действием

$$\rho(L_i^j) \triangleright e_k = e_i C_k^j,$$

задает *неприводимое* представление алгебры $\mathcal{L}(R)$ в пространстве V. Здесь $C_1 = \mathrm{Tr}_{(2)}\Psi_{21}$, где Ψ — кособратная матрица к R.

Указание. Для доказательства неприводимости воспользуйтесь невырожденностью матрицы C.

б) Найдите характеры центральных элементов $p_k(L) = \mathrm{Tr}_R L^k$ в представлении ρ:

$$\chi_\rho(p_k) = \mathrm{Tr}_V(\rho(p_k)).$$