

Задание 8

- 1) Для системы 2-х материальных точек в \mathbb{R}^3 с радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 и потенциальной энергии $U((\vec{n}, \vec{r}_1 - 2\vec{r}_2))$, где \vec{n} — постоянный вектор, подсчитайте имеющиеся законы сохранения и охарактеризуйте их качественно.

- 2) Механическая система задаётся лагранжианом

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, t) = \dot{x}^2 x^2 + \dot{y}^2 y^2 - \frac{x^2 y^2}{t^2}$$

При каких значениях параметров a и b система преобразований

$$\Delta \varepsilon : \left| \begin{array}{l} \tilde{x} = e^{\varepsilon} x \\ \tilde{y} = e^{a\varepsilon} y \\ \tilde{t} = e^{b\varepsilon} t \end{array} \right.$$

имеет симметрии действий? Возьмите явное выражение для соответствующего Ньютона-Лагранжиана.

- 3) Движение массивного точечного заряда в поле электрического диполя в \mathbb{R}^3 задаётся следующим лагранжианом:

(2)

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{e(\vec{d}, \vec{r})}{r^3},$$

где \vec{r} — радиус-вектор заряда, $r = |\vec{r}|$, \vec{d} — постоянный вектор, называемый дипольным моментом.

a) Определите, какие из преобразований Гамильтония являются симметриями системы, и постройте соответствующие нётеровские интегралы движения.

б) Покажите, что семейство преобразований

$$\Delta_\alpha : \tilde{\vec{r}} = \alpha \vec{r}, \quad \tilde{t} = \alpha^2 t$$

является симметрией системы, и постройте нётеровский интеграл движения.

(4) Материальная точка массы m движется по оси $O\tilde{x}$ в однородной силовой поле:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + gx.$$

С помощью теоремы Нётер определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии

$$\begin{cases} \tilde{t} = t \\ \tilde{x} = x + \varepsilon. \end{cases}$$