Семинар 8

Примеры применения теоремы Нётер

Для разминки потренируемся в определении симметрий действия и качественной интерпретации соответствующих законов сохранения

Рассмотрим систему из 2-х частиц в $\mathbb{R}^3$ с потенциальной энергией U:

$$L(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \underbrace{\frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2}}_{T} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

---

1. Предположим, что $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U_1(\vec{r}_1) + U_2(\vec{r}_2)$, тогда

$$\boxed{L = L_1 + L_2, \text{ где}}$$

$$L_1(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1) = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} - U_1(\vec{r}_1),$$

$$L_2(\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U_2(\vec{r}_2).$$

Это на самом деле система двух невзаимодействующих частиц (движение одной частицы никак не зависит от другой частицы), каждая из них живет в своем потенциальном поле (U_1 или U_2).

Действие системы

$$\boxed{S = \int L_1(\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1)\, dt_1 + \int L_2(\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2)\, dt_2} \quad (1)$$

представляется в виде суммы двух интегралов,

каждый интеграл связан с траекторией только одной частицы ($\vec{r}_1(t)$ или $\vec{r}_2(t)$). Переменную интегрирования в каждом интеграле можно обозначить по-своему (t_1 или t_2) — время для каждой частицы можно измерять по своей шкале. (2)

В результате имеются 2, связанные с временем, симметрии действия

$$\begin{cases} \tilde{t}_1 = t_1 - \varepsilon_1 \\ \tilde{t}_2 = t_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{t}_1 = t_1 \\ \tilde{t}_2 = t_2 - \varepsilon_2 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{\vec{r}}_1 = \vec{r}_1 \\ \tilde{\vec{r}}_2 = \vec{r}_2 \end{array} \right. \text{ — в обоих случаях}$$

и два закона сохранения: сохраняется по отдельности энергия каждой частицы:

$$E_{1,2} = \dot{\vec{r}}_{1,2} \frac{\partial L_{1,2}}{\partial \dot{\vec{r}}_{1,2}} - L_{1,2} = \frac{m_{1,2} \dot{\vec{r}}_{1,2}^{\,2}}{2} + U_{1,2}$$

Кроме того, у каждой частицы могут быть ещё свои законы сохранения, связанные с симметриями ее действия и не зависящие от соседки. В частности, если $U_1 = U_2 = 0$ то сохраняются по отдельности все компоненты импульсов обоих частиц $m_1 \dot{\vec{r}}_1 = \overrightarrow{const}_1$, $m_2 \dot{\vec{r}}_2 = \overrightarrow{const}_2$, и компоненты их моментов импульса $m_1[\vec{r}_1, \dot{\vec{r}}_1]$ и $m_2[\vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_2]$.

---

(2) Включим взаимодействие между частицами:

$$U = U\left((\vec{r}_1, \vec{n}), |\vec{r}_2|\right), \quad \vec{n} = \overrightarrow{const}$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы, а значит и лагранжиан, не меняются при

* вращении $\vec{r}_1$ вокруг оси $\vec{n}$: $\delta_\varepsilon \vec{r}_1 = \varepsilon[\vec{n}, \vec{r}_1]$
* трансляциях $\vec{r}_1$ в плоскости $\perp \vec{n}$. (см. лекцию 8)
* при $\forall$ вращениях $\vec{r}_2$

Значит в системе сохраняется момент импульса второй частицы (все 3 компоненты), проекция момента импульса первой частицы на направление $\vec{n}$, проекция импульса первой частицы на плоскость $\perp \vec{n}$ (2 компоненты). Есть еще общий закон сохранения энергии всей системы, но не энергий отдельных частиц (считаем что $U \neq U_1((\vec{r}_1, n)) + U_2(|\vec{r}_2|)$). Всего набралось 7 законов сохранения.

---

3 Если $U = U((\vec{r}_1, \vec{r}_2))$

В системе остались симметрии относительно общего вращения двух частиц, но не каждой в отдельности (3 компоненты момента импульса всей системы сохраняются), и симметрия при трансляции времени (закон сохранения энергии системы). Всего 4 закона сохранения.

Вопрос: не является ли вращение первой частицы вокруг радиус-вектора 2-й частицы симметрией системы? Такое вращение не меняет потенциальной энергии системы. Но

оно изменит кинетическую энергию 1-й частицы и всей системы. Дело в том, что ортогональная матрица такого вращения зависит от координат второй частицы, а значит и от времени ($\vec{r}_2(t) \neq const$). Поэтому $\dot{\vec{r}}_1$ при таком вращении преобразуется не ортогональным преобразованием

$$\vec{r}_1 \mapsto O(\vec{r}_2)\circ\vec{r}_1 \; ; \; \dot{\vec{r}}_2 \mapsto O(\vec{r}_2)\circ\dot{\vec{r}}_1 + \frac{dO(\vec{r}_2)}{dt}\circ\vec{r}_1$$

---

4 Если $U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

как в задаче о центральном взаимодействии 2-х тел.

В системе есть симметрия относительно общих вращений (сохраняются 3 компоненты момента импульса системы), общих трансляций (сохраняются 3 компоненты импульса системы), трансляции времени (сохраняется энергия системы).

Всего 7 законов сохранения

Теперь перейдём к вычислению нётеровских интегралов движения.

<u>Пример 1</u> <u>Механическая система с трением</u>

задаётся (как убедимся) лагранжианом

$$\boxed{L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - k^2x^2)e^{2kt}} \quad (2)$$

Определим, при каких значениях параметра a семейство преобразований

$$\Delta_\varepsilon : \quad \begin{cases} x \longrightarrow \tilde{x} = e^{-\varepsilon a} x \\ t \longrightarrow \tilde{t} = t + \varepsilon \end{cases} \qquad (3)$$

является симметрией действия. С этой целью посчитаем

$$S^{(0)}[\tilde{x}(\tilde{t})] = \int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} L\left(\tilde{x}, \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}}, \tilde{t}\right) d\tilde{t} =$$

возвращаемся к переменной интегрирования t, учтя $d\tilde{t}/dt = 1$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L\left(e^{-\varepsilon a} x, e^{-\varepsilon a} \frac{dx}{dt}, t+\varepsilon\right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}\left(e^{-2\varepsilon a} \dot{x}^2 - k^2 e^{-2\varepsilon a} x^2\right) e^{2n(t+\varepsilon)} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} e^{2\varepsilon(n-a)} \left(\dot{x}^2 - k^2 x^2\right) e^{2nt} dt$$

Очевидно, при $a = n$ $S^{(0)}[\tilde{x}(\tilde{t})] = S^{(0)}[x(t)]$ и преобразования (3) являются симметрией действия механической системы (2) при выборе функции $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{t}; \varepsilon) = 0$ (см. (3а) в Лекции 8).

Очевидно также, что при $n \neq a$ никаким выбором $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{t}; \varepsilon)$ мы не сможем обеспечить $S^{(0)}[x(t)] = S^{(\Lambda)}[\tilde{x}(\tilde{t})]$ так как разность $S^{(0)}[\tilde{x}(\tilde{t})] - S^{(0)}[x(t)]$ при $n \neq a$ содержит

в подинтегральном выражении член квадратичный по $\dot{x}$, а компенсация, вносимая $\Lambda(\tilde{x}, \tilde{t}; \varepsilon)$ содержит только члены степеней 0 и 1 по $\dot{x}$.

Итак $\begin{cases} \tilde{x}_\varepsilon = e^{-n\varepsilon} x \\ \tilde{t}_\varepsilon = t + \varepsilon \end{cases}$ — симметрия действия

Соответствующий нётеровский ток

$$\left(\xi_0 = \frac{\partial \tilde{t}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 1, \ \xi_1 = \frac{\partial \tilde{x}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -nx, \ \lambda = 0 \right)$$

имеет вид

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(-nx) - \left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)\cdot 1 =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2} e^{2nt}\left(\dot{x}^2 + k^2 x^2 + 2nx\dot{x}\right) = \text{const}} \quad (4)$$

Это замена закона сохранения энергии для этой неконсервативной системы (термин для обозначения систем, в которых энергия не сохраняется)

Что описывает эта система?

Её уравнения Эйлера-Лагранжа приводятся к виду

$$\boxed{\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0} \quad (5)$$

Такое уравнение описывает гармонический осциллятор в среде с трением, пропорциональным скорости. n — коэффициент трения.

При $0 < n < |k|$ имеем затухающие гармонические колебания:

$$\boxed{x(t) = A e^{-nt} \cos(\omega t + \varphi)}, \text{ где } \omega = \sqrt{k^2 - n^2} -$$

общее решение дифура (A и φ определяются начальными данными задачи).

То, что естественно назвать физической энергией системы $\boxed{E_{физ} = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{k^2}{2}x^2}$

кинетическая и потенциальная энергии осциллятора

уменьшается со временем экспоненциально (e^{-2nt}), испытывая при этом колебания с частотой 2ω (влияние слагаемого $2nx\dot{x}$), как видно из (4). Но никогда не растет.

Математическое определение энергии $\boxed{E_{мат} = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = e^{2nt} E_{физ}}$ не убывает, а колеблется.

Отличие "математической" энергии от физической — верный признак нефундаментальности этой модели.

Пример 2 Свободная релятивистская частица

(в одном пространственном измерении)

Рассмотрим странного вида действие:

$$\boxed{S[x(t)] = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}\, dt} \qquad (6)$$

Здесь α и c – два параметра. c – имеет размерность скорости ($\dot{x}/c$ – безразмерно). Назовём предварительно c "скоростью света".

Лагранжиан этой системы $L = -\alpha\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}$ приближается к привычному нам квадратичному по скоростям лагранжиану в пределе $|\dot{x}/c| \ll 1$, причем

$$L \overset{|\dot{x}/c|\ll 1}{=} -\alpha\left(1-\frac{\dot{x}^2}{2c^2}\right) + o\left(\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)$$

Если выбрать $\boxed{\alpha = mc^2}$, то

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} \underset{\text{несущественная const.}}{- mc^2} + o(\dot{x}^2/c^2) \text{ – сводится}$$

к лагранжиану обычной (нерелятивистской) частицы. Зафиксируем $\boxed{\alpha = mc^2}$, где m будем предварительно называть "массой частицы".

Поскольку $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$, в системе, очевидно, есть два закона сохранения:

1) Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \boxed{\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} = p = const} \qquad (7)$$

2) Закон сохранения энергии

$$\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \boxed{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} = E = const} \qquad (8)$$

Чтобы получить траектории движения системы, проинтегрируем ещё раз закон сохранения импульса:

$$p = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} = const$$

$\Downarrow$ выражаем $\dot{x}$

$$\boxed{\dot{x}^2 = \frac{p^2}{p^2+m^2c^2}\cdot c^2} \qquad (7a)$$

Очевидно $\boxed{\dot{x} = const}$, но с одной особенностью $\boxed{\dot{x}/c \leq 1}$, что впрочем ожидалось, если считать действие (6) вещественным.

Мы получили банальную прямолинейно и равномерно движущуюся частицу. Что же в ней необычного? Необычны симметрии

Мы имеем обычные симметрии трансляций в пространстве и во времени

$$\begin{cases} \tilde{x} = x+\varepsilon \\ \tilde{t} = t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \tilde{x} = x \\ \tilde{t} = t+\varepsilon, \end{cases}$$

приводящие к законам сохранения импульса и

энергии.

Если бы степеней свободы было больше, например при $L = -mc^2\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}$, мы бы имели ещё обычные симметрии при вращениях пространственной системы координат, приводящие к закону сохранения момента импульса.

А вот обычной симметрии перехода в движущуюся систему координат больше нет: проверьте, что преобразования

$$(9)\quad \begin{cases} \tilde{x} = x + vt \\ \tilde{t} = t \end{cases}$$

v – непрерывный параметр семейства преобразований

не может быть симметрией действия (6)

Взамен появляется другая симметрия

$$(10)\quad \begin{cases} \tilde{x} = \operatorname{ch}\theta\, x + \operatorname{sh}\theta\, ct \\ \tilde{t} = \frac{1}{c}\operatorname{sh}\theta\, x + \operatorname{ch}\theta \cdot t \end{cases}$$

θ – непрерывный параметр

Убедиться в этом проще всего, если перейти к новой формальной переменной интегрирования τ в действии (6):

$$x = x(\tau),\quad t = t(\tau),\quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx/d\tau}{dt/d\tau}$$

$$S[x(\tau), t(\tau)] = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2}\, d\tau \qquad (6a)$$

При этом под знаком корня возникает квадра-

тичная форма переменных $\frac{dt}{d\tau}$ и $\frac{dx}{d\tau}$ с диагональной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/c^2 \end{pmatrix}$. Такие формы инвариантны при гиперболических поворотах вида

$$\boxed{\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x}/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\theta & sh\theta \\ sh\theta & ch\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x/c \end{pmatrix}} \qquad (10a)$$

что эквивалентно формулам (10).

<u>Rem:</u> Заметим, что при параметризации

$$\boxed{ch\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad sh\,\theta = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},}$$

или, проще $\boxed{th\,\theta = \frac{v}{c}}$,

преобразования (10) в пределе $|v/c| \ll 1$ переходят в привычные нам правила перехода в движущуюся систему координат (9).

Нетеровский ток, отвечающий преобразованиям (10) не даёт новых независимых законов сохранения (проверьте!)

Однако, если мы всерьёз принимаем действие (6), то ему соответствуют другие правила перехода между инерциальными системами отсчёта. Переходу в движущуюся ИСО соответствуют не правила (9), а правила (10),

и они затрагивают время: время в движущихся друг относительно друга ИСО течёт по-разному! Группа преобразований ИСО — это уже не группа Галилея, а группа Пуанкаре (преобразования (10) называются преобразованиями Лоренца).

Эта замена группы фундаментальных симметрий сказывается и на физике даже для прямолинейной свободной частицы.

Обратим внимание на связь сохраняющихся энергии и импульса свободной частицы.

У нерелятивистской частицы это $E = \frac{p^2}{2m}$

Если всерьез принимать модель релятивистской частицы, то для нее из формул (7а) и (8) стр 9. следует связь:

$$\boxed{E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}}$$

Отсюда при $p = 0$ $\boxed{E = mc^2}$ — у всякой частицы есть неотъемлемая энергия покоя, пропорциональная её массе. Именно эта энергия высвобождается при аннигиляции частиц в квантовом мире.

А при $m \to 0$ $\boxed{E \to pc}$. Именно так линейно связаны энергия и импульс безмассовых частиц — фотонов