Листок 1. Множества, отображения, высказывания.

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать. (Каждый пункт оценивается отдельно, пункт со звездочкой считается с удвоенным весом. Задачи, успешно рассказанные у доски на семинаре, объявлять не надо.) Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу X объявленных задач по формуле $X - 4 - 2N + 3k$. Здесь N – номер недели, когда происходит сдача листка, k - количество верно рассказанных у доски на семинаре задач. (Их отметит преподаватель семинара.)

ВАЖНО: Необходимо заранее договариваться с вашим преподавателем о времени сдачи листка!

Задача 1. Докажите аккуратно одно из тождеств про операции с множествами на выбор принимающего.

Задача 2. Запишите с помощью кванторов и логических операций:

- Для каждого целого x найдётся целое y такое, что $x + y > 0$.
- Существует бесконечно много пар простых чисел, отличающихся на 2.

Задача 3. Докажите тождество $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} = x\bar{z} \vee z\bar{y} \vee y\bar{x}$ двумя способами:

a) составив таблицы истинности левой и правой части;

b) преобразовав левую часть в правую пользуясь тождествами булевой алгебры.

Задача 4. a) Покажите, что отображение $f : M \to N$ конечных множеств сюръективно тогда и только тогда, когда у него существует правое обратное, т.е., отображение $g : N \to M$ такое, что $f \circ g = \mathrm{Id}_N$. Здесь Id_N - тождественное отображение множества N в себя.

b) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для инъективных отображений.

Задача 5. a) Покажите, что отображение $f : M \to N$ сюръективно тогда и только тогда, когда на него можно сокращать справа, т.е., из всякого равенства $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ следует, что $g_1 = g_2$.

b) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для инъективных отображений.

Задача 6. Пусть Ω - некоторое множество (не обязательно конечное). Сопоставим каждому подмножеству $A \subset \Omega$ функцию $\chi_A : \Omega \to \{0, 1\}$, заданную условием $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$ и $\chi_A(x) = 0$, если $x \notin A$ (характеристическая функция подмножества A).

a) Докажите, что сопоставление $A \mapsto \chi_A$ задает биекцию множества $\mathcal{B}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω и множества функций $\{0, 1\}^{\Omega}$;

b) Покажите,что если A и B — подмножества Ω, то $\chi_{A\cup B} = \chi_A \vee \chi_B$ и $\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$. Каким операциям над множествами соответствуют сложение по модулю два $\chi_A + \chi_B$ и импликация $\chi_A \to \chi_B$?

Задача 7. Установите биекции между множествами:

a) $Z^{X\cup Y}$ и $Z^X \times Z^Y$, если $X, Y \in \mathcal{B}(\Omega)$ и $X \cap Y = \emptyset$;

b) $\left(A^B\right)^C$ и $A^{B\times C}$

Подсказка. Пусть задано отображение $f : B \times C \to A$. Тогда всякому элементу $c \in C$ можно сопоставить отображение $f(\cdot, c) : B \to A$, переводящее $b \in B$ в $f(b, c)$

Задача 8. Докажите, что любое отображение $f : X \to Y$ можно представить в виде

a) * композиции $f = g \circ h$, где g - сюръекция, а h – инъекция;

b) композиции $f = p \circ q$, где q сюръекция, а p – инъекция.

Задача 9. Пусть $f : M \to M$ - биекция конечного множества.Тогда $f^n = \mathrm{Id}_M$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Приведите пример биекции бесконечного множества, для которой это утверждение неверно

Задача 10. a) Пусть $f = g \circ h$. Докажите, что если отображения g и h инъективны (сюръективны) , то и f инъективно (сюръективно).

b) Известно, что отображение $g \circ h$ сюръективно. Можно ли утверждать, что g сюръективно? Можно ли утверждать, что h сюръективно?

Задача 11. Пусть $f \in X^X$, причем f инъективно, но не сюръективно. Определим множества $A_0 = X$, $A_1 = f(A_0)$, $\ldots$, $A_{n+1} = f(A_n)$, $\ldots$.

a) Докажите, что $A_{n+1} \subset A_n$. Приведите примеры, показывающие, что множество $B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ может быть как пустым, так и непустым.

b) Докажите, что ограничение f на $C_n = A_n \setminus A_{n+1}$ является биекцией между C_n и C_{n+1}.

c) Докажите, что ограничение f на B является биекцией множества B на себя.

Задача 12. * Пусть N - конечное множество из n элементов. Перестановкой называется биекция N в себя. Циклом (длины k) называется перестановка M такая, что $f(x_1) = x_2, f(x_2) = x_3, \ldots, f(x_{k-1}) = x_k, f(x_k) = x_1$ для некоторых попарно различных элементов $x_1, \ldots x_k$ из N и $f(y) = y$ для всех элементов N отличных от $x_1, \ldots x_k$. Покажите, что всякая перестановка представляется в виде композиции коммутирующих циклов.

Задача 13. Таблица истинности булевой функции $f(x_1, \cdots, x_n)$ от n переменных описывается числами $a_{k_1,\ldots k_p} \in \{0, 1\}$, равными значению функции на наборе $(x_1, ..., x_n)$ из нулей и единиц, в котором единицы стоят на местах $k_1, \ldots k_p$, где $1 \leq k_1 < \ldots < k_p \leq n$. Зная эту таблицу, выпишите формулу для f с использованием операций $\wedge, \vee, \neg$.

Подсказка. Решите вначале задачу для функции, которая принимает значение 1 ровно один раз .

Задача 14. Сформулируйте принцип доказательства от противного. Предъявите доказательства от противного следующих утверждений:

a) Не существует рационального числа, квадарат которого равен 2.

b) Простых чисел бесконечно много.

Задача 15. Покажите на примере, что прямая теорема $A \to B$ не равносильна обратной $B \to A$. А что можно сказать про утверждения $\neg A \to \neg B$ и $\neg B \to \neg A$?

Задача 16. * Пусть X — некоторое множество. Постройте биекцию между $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}}$ и $X^{\{1,2,\ldots,n\}}$.

Задача 17. Для отображения $f : M \to N$ и подмножеств $A \subset N$ и $B \subset N$ расставьте с обоснованием знаки включения в формулах

$$ff^{-1}(B)?B, \quad f^{-1}(A \cap B)?f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$