Семинар 2

Некоторые задачи снабжены советами (буква С). К ним следует относиться так же, как и к любым другим советам.

1. Опишите все одномерные представления группы $\mathbb{Z}_2$.

2. Докажите, что любое одномерное представление группы G содержит в ядре ее коммутант (что это такое?) $[G, G]$.

3. Если группа G неабелева, то ее любое точное двумерное представление неприводимо. Доказать.

4. Докажите, что любое неприводимое комплексное представление конечной абелевой группы одномерно (С: в курсе Алгебра 1 была (возможно, не совсем явно) доказана следующая полезная

Теорема. Семейство коммутирующих, индивидуально диагонализируемых линейных операторов, можно диагонализировать одновременно).

5. Обозначим через G^{ab} фактор-группу группы G по ее коммутанту. Докажите, что:

а) группа G^{ab} абелева;

б) (задача из семинара 13 весны 20 года) $[S_n, S_n] = A_n$.

Тем самым, абелизация симметрической группы – это группа $\mathbb{Z}_2$.

6. Постройте биекцию между множеством одномерных представлений группы G и множеством одномерных представлений абелевой группы G^{ab}.

7. Докажите, что у симметрической группы есть ровно два одномерных представления: тривиальное представление и представление sign (знак перестановки).