Прикладные методы анализа 2020.
Занятие 08.09.20

Маятник под действием вынуждающей силы

***Задача* 1.** Движение математического маятника под действием вынуждающей силы описывается уравнением

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0. \tag{1}$$

Требуется описать движение явно, т. е. выразить $x(t)$ в терминах $f(t)$.

Решаем методом вариации постоянных. Общее решение однородного уравнения $\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t) = 0$ имеет вид:

$$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Решение исходного неоднородного уравнения ищем в том же виде, считая теперь C_1 и C_2 функциями времени,

$$x(t) = C_1(t) \sin\omega t + C_2(t) \cos\omega t.$$

Дифференцируя, получаем

$$\dot{x}(t) = \left(\dot{C}_1(t)\sin\omega t + \dot{C}_2(t)\cos\omega t\right) + \left(\omega C_1(t)\cos\omega t - \omega C_2(t)\sin\omega t\right).$$

Две неизвестных функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$ находятся из системы двух уравнений, так что кроме исходного уравнения мы вправе наложить еще одно условие:

$$\dot{C}_1(t)\sin\omega t + \dot{C}_2(t)\cos\omega t = 0. \tag{2}$$

С учетом этого соотношения выражение для $\ddot{x}(t)$ упростится, в него не войдут вторые производные C_1 и C_2,

$$\ddot{x}(t) = \omega\left(\dot{C}_1(t)\cos\omega t - \dot{C}_2(t)\sin\omega t\right) - \omega^2\left(C_1(t)\sin\omega t + C_2(t)\cos\omega t\right),$$

а подстановка производных в исходное уравнение (1) после замечательных сокращений приведет к уравнению

$$\omega\dot{C}_1(t)\cos\omega t - \omega\dot{C}_2(t)\sin\omega t = f(t). \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) составляют систему линейных уравнений на $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_1(t)$, решение которой

$$\dot{C}_1(t) = \frac{f(t)\cos\omega t}{\omega}, \qquad \dot{C}_2(t) = -\frac{f(t)\sin\omega t}{\omega} \tag{4}$$

и откуда

$$C_1(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau d\tau + D_1, \qquad C_2(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau d\tau + D_2.$$

Здесь D_1 и D_2 – константы интегрирования. Следовательно, имеем

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\cos\omega\tau d\tau \sin\omega t + D_1\sin\omega t - \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\sin\omega\tau d\tau\cos\omega t + D_2\cos\omega t.$$

Подставляя начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, находим $D_1 = D_2 = 0$, и, упрощая, получаем ответ

$$x(t) = \int_0^t \frac{\sin\omega(t-\tau)}{\omega} f(\tau) d\tau. \tag{5}$$

Формула (5) допускает простую тригонометрическую интерпретацию. Разобъем отрезок интегрирования на маленькие кусочки и заменим приближенно интеграл интегральной суммой. Формула (5) говорит о том, что вклад в решение $x(t)$ импульса силы $\delta F = f(t_k)\delta t$, приложенной в момент времени t_k, равен

$$\delta x(t) = \frac{\sin\omega(t-t_k)}{\omega}\delta F = \frac{\sin\omega(t-t_k)}{\omega} f(t_k)\delta t.$$

***Задача* 2.** Рассмотрим теперь движение маятника с трением под действием вынуждающей силы, считая все константы – массу, коэффициент трения – переменными, т. е. рассмотрим задачу Коши вида

$$\ddot{x}(t) + a(t)\dot{x}(t) + b(t)x(t) = f(t), \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0. \tag{6}$$

При общих $a(t)$ и $b(t)$ эта задача в квадратурах не решается. Однако, если мы знаем фундаментальную систему $x_1(t)$ и $x_2(t)$ решений однородного уравнения, то метод вариации постоянных позволяет, как и в прошлом примере, выписать интегральную формулу для решений. А именно, система (3), (4) преобразуется в систему

$$\begin{aligned} \dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) &= 0, \\ \dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) &= f(t), \end{aligned} \tag{7}$$

решение которой имеет вид

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}, \qquad \dot{C}_2(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)},$$

где

$$W(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t)$$

есть определитель Вронского системы $x_1(t)$, $x_2(t)$. Отсюда с учетом начальных условий получаем формулу для решения

$$x(t) = \int_0^t \frac{x_1(\tau)x_2(t) - x_2(\tau)x_1(t)}{W(\tau)} f(\tau)d\tau.$$