

Листок 1.

1. Доказать, что борелевская σ -алгебра плоскости порождается замкнутыми правильными треугольниками.
2. Доказать, что борелевская σ -алгебра плоскости не порождается параболами.
3. Доказать, что совокупность пересечений борелевских подмножеств плоскости с прямой есть в точности борелевская σ -алгебра прямой.
4. Привести пример борелевского множества, которое не является счетным объединением замкнутых множеств.
5. Пусть A_n — последовательность множеств из σ -алгебры \mathcal{A} . Доказать, что в \mathcal{A} входит множество всех точек, принадлежащих бесконечно многим A_n .
6. Доказать, что для каждого $q \in (0, 1)$ в $[0, 1] \times [0, 1]$ есть компакт лебеговской меры q , не имеющий внутренних точек.
7. Пусть A — множество положительной меры Лебега на прямой. Доказать, что множество разностей $A - A = \{a_1 - a_2 : a_1, a_2 \in A\}$ содержит интервал.
8. Построить измеримое по Лебегу множество на плоскости с неизмеримыми проекциями на координатные оси.
9. Доказать, что если две борелевские меры на $[0, 1]$ имеют равные значения на всех отрезках, то они равны.
10. Привести пример двух различных вероятностных мер на σ -алгебре, значения которых совпадают на некотором классе множеств, порождающих эту σ -алгебру.