## Листок 4

Листок можно сдать только целиком за один раз, при этом перед сдачей листка студент должен объявить номера задач, которые он умеет решать. (Каждый пункт оценивается отдельно, пункт со звездочкой считается с удвоенным весом. Задачи, успешно рассказанные у доски на семинаре, объявлять не надо, их отметит преподаватель семинара.) Сдача листка состоит в рассказе решений некоторых задач из этого списка на выбор преподавателя — листок считается сданным, если все решения рассказаны верно. Повторная попытка сдачи листка возможна, но не ранее, чем на следующий день. Оценка за листок вычисляется по числу $X$ объявленных задач по формуле $X + 6 - 2\left[N + \frac{2}{N-1}\right] + 3k$. Здесь $N$ – номер недели, когда происходит сдача листка, $k$ - количество успешно рассказанных у доски на семинаре задач, $[a]$ это целая часть числа $a$.

**Задача 1.** Докажите счетность множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Придумайте формулу, задающую соответствующую биекцию с множеством натуральных чисел.

**Задача 2.** Какова мощность множества всех прямых на плоскости?

**Задача 3.** Докажите счетность

a) множества всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$

b) множества периодических с некоторого места последовательностей натуральных чисел

**Задача 4.** Покажите, что множество всех действительных алгебраических чисел (т.е., множество действительных корней многочленов с рациональными коэффициентами) счетно, а множество трансцендентных чисел имеет мощность континуум.

**Задача 5.** Покажите, что

a) объединение счетного числа континуальных множеств

b) множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел

c) множество отображений $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

d) множество всех счетных подмножеств $\mathbb{R}$

все имеют мощность континуум.

**Задача 6.** Имеют ли мощность континуума множества

a) всех функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) * биективных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c) * непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

**Задача 7.** * Если квадрат разбит на две части, то хотя бы одна из них имеет мощноссть континуум.

**Задача 8.** * Покажите, что множества $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ и $2^{\mathbb{R}}$ равномощны.

**Задача 9.** Рассмотрим все множества, являющиеся подмножествами некоторого множества $X$. Покажите, что:

a) отношение: равномощности (т.е. $M \sim N$, если существует биекция $f : M \to N$) является отношением эквивалентности на $2^X$. Классы эквивалентности называются мощностями множеств;

b) отношение $M \prec N$, если существует инъекция $f : M \to N$, не является отношением частичного порядка на $2^X$;

c) отношение $\prec$ согласовано с отношением $\sim$ и определяет на множестве классов эквивалентности отношение $\bar{\prec}$, которое уже является отношением частичного порядка.

**Задача 10.** Сформулируйте и докажите теорему Кантора-Бернштейна

**Задача 11.** Докажите теорему Кантора в общей формулировке: мощность множества $2^M$ всех подмножеств любого множества $M$ больше (см. задачу 9) мощности множества $M$.

**Задача 12.** ** Пусть $M$ - замкнутое множество на прямой без изолированных точек. Тогда оно имеет мощность континуум.