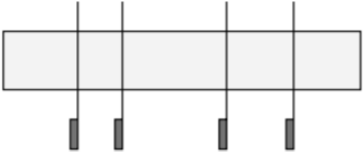
Приложения Леммы Шпернера

Исаева Ксения

2020

Содержание:

Делим пироги!



Разрез торта

1 - площадь всего торта

n игроков

$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$

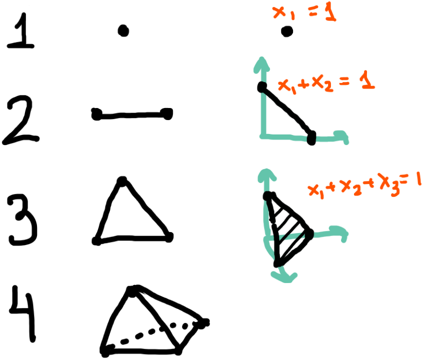
$x_i \geq 0$

N игроков, Мы делим торт на n кусков так, что каждый из игроков получит кусок, который будет по его мнению лучше или хотя бы не хуже, чем у остальных.

Используем n-1 нож для разрезов параллельных плоскости левой стороны торта.

Пространство вариантов разрезов:
Каждая точка - разрез.

Кол-во вершин



0-симплекс

1-симплекс

2-симплекс

3-симплекс

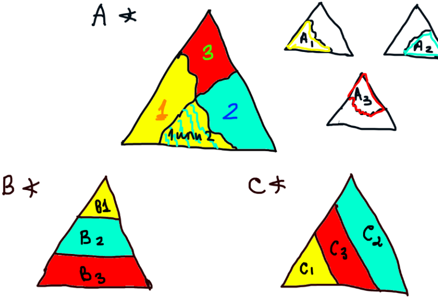
Условия задачи:

1) **Игроки голодные** - предпочтут пустому куску хотя бы какой-нибудь

2) **Множества предпочтений замкнуты** - множество точек, в которых игрок А выберет 1 кусок замкнуто. Аналогично А2, А3, В1, В2, В3 и т.д замкнуты.

Наша задача - найти точку, где разные игроки выбирают разные куски, т.е., например, где пересекаются множества А1, В3, С2.

Точка - какой-то разрез торта.
Треугольник - пространство всех вариантов разрезов торта.



Теорема о дележе торта: При дележе торта, при котором игроки голодные, а наборы предпочтений замкнуты, существует разделение без зависти - т.е. разбиение торта, где все люди предпочитают разные куски.

Т.е. существует точка в пространстве вариантов разрезов, лежащая в пересечении трёх множеств, в которых игроки A, B и C выберут разные куски (пересечение A1, B3, C2).

План доказательства:

1) Триангуляция - Буквы;

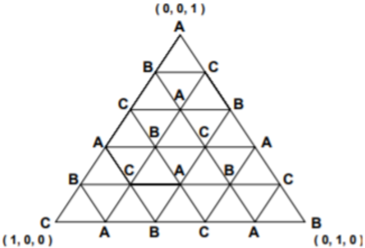
2) Цифры - лемма Шпернера;

3) Предельный переход.

Буквы!

n=3; игроки - A, B и C;

Триангулируем S;



Маркируем вершины нашей триангуляции так, чтобы **каждый треугольник триангуляции был промаркирован A-B-C.**

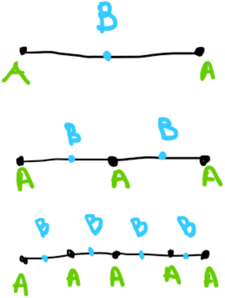
Для любой ли триангуляции это можно сделать?

Теорема о существовании триангуляции: Для любого n и $\epsilon > 0$ существует триангуляция n-симплекса, такая что можно на её вершинах расставить буквы A-B-C-D-... (n штук), так, что каждый симплекс имеет вершины со всеми буквами и его сторона $\leq \epsilon$.

Приведите пример подобной триангуляции.

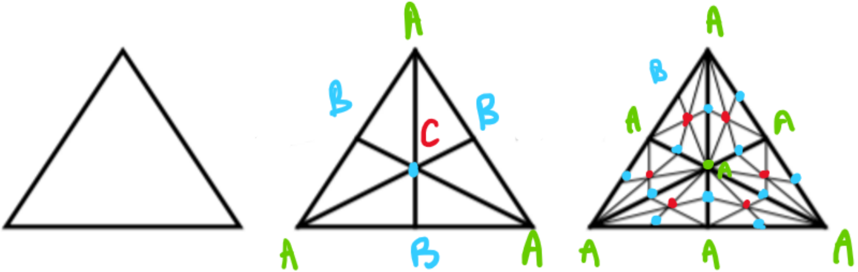
Барицентрическое разбиение.

1) n=1



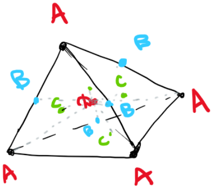
Сначала на сторонах: на середине отрезков.

2) n=2



Затем в центрах граней.

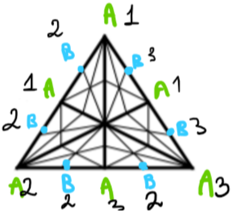
3) n=3



После - в центре многоугольника.

Цифры!

Спрашиваем владельца каждой вершины - **"Какой кусок ты бы выбрал, если бы торт был разрезан как в этой точке?"** и обозначаем вершину номером.



Наша задача - **найти треугольник с разными буквами и разными цифрами.**

Полученная маркировка - маркировка Шпернера.

Почему?

Предельный переход!

Полученная маркировка - маркировка Шпернера.

Значит, мы можем найти треугольник 1-2-3.

Чтобы найти разрез торта (точку, в которой все игроки выберут разные куски), будем триангулировать S на всё меньшие и меньшие треугольники.

Получаем бесконечную последовательность треугольников 1-2-3. Так как вариантов для A, B и C выбрать разные куски всего 6, то найдется бесконечное кол-во треугольников с каким-то одним выбором для них (A2, B1, C3). Так как множества предпочтений замкнуты, то в итоге мы дойдём до точки, где у A, B и C разные разные куски.

Делим арендную плату!

Теорема об арендной плате: Есть n соседей, который хотят поделить арендную плату в n-комнатной квартире. Есть условия:

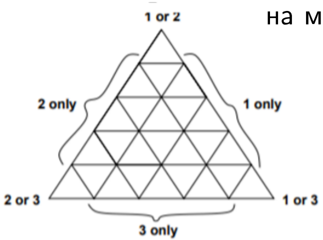
1) **Хорошая квартира** - каждый выберет хоть какую-то комнату вместо никакой.

2) **Человеческая алчность** - если есть бесплатные комнаты, каждый выберет одну из них.

3) **Множества предпочтений замкнуты** - множество точек, в которых A выбирает комнату 1, замкнуто. Аналогично A2, B2 и т.д. замкнуты.

Цена арендной платы всей квартиры $= 1$.
n игроков
$x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$
$x_i \geq 0$

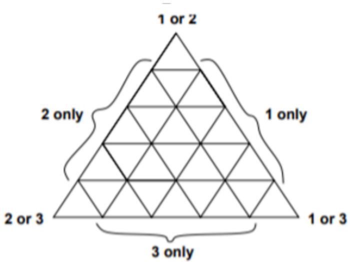
Будем делать аналогично дележу торта - при помощи барицентрического разбиения маркируем именами игроков вершины триангуляции. Дальше спрашиваем у владельцев номер комнаты, который они предпочтут в этом разбиении цен.



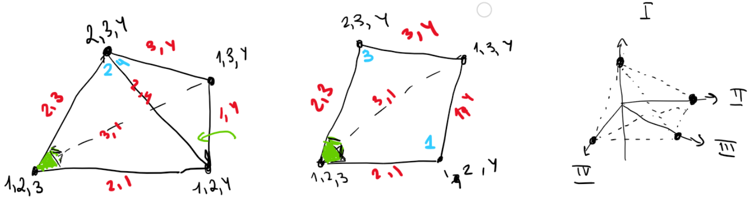
Получаем маркировку, похожую на маркировку Шпернера, но не её!

Двойственная лемма Шпернера: Пусть задана маркировка вершин триангуляции n-мерного симплекса, который на своей границе обладает свойством указанным на рисунке для случая n=2. Тогда найдётся ячейка триангуляции, вершины которой промаркированы всеми числами 1...(n+1).

1) n=2



2) n=3



Доказательство теоремы об арендной плате аналогично док-ву теоремы о дележе торта:

1) Барицентрически триангулируем, маркируем БУКВАМИ.

2) Спрашиваем у игроков, какую комнату они бы предпочли в данной точке - маркируем ЦИФРАМИ. Используем двойственную лемму Шпернера.

3) Предельный переход - находим точку.