Задачи для досрочной сдачи

по курсу «Дифференциальные уравнения», осень 2020 г.

Правила сдачи.

1. Решения этих задач сдаются лектору курса А. В. Клименко — сначала в письменном виде (присылайте фото/скан на `klimenko05@mail.ru`), а затем устно (договаривайтесь с лектором по почте о времени и способе коммуникации).
2. Присылаемые сканы/фото страниц должны быть собраны в один pdf-файл в правильном порядке и ориентации. В письме, к которому приложен файл, напишите, решения каких задач содержатся в файле. Разрешается присылать решения задач в несколько приёмов, но просьба не злоупотреблять этой возможностью. Решения задач должны быть присланы в письменном виде до 23:59 14 ноября, при этом до 23:59 31 октября должны быть присланы решения минимум 8 задач.
3. При обсуждении решений Вы должны быть готовы сформулировать используемые определения и теоремы. Не пытайтесь сдавать решения, которых вы не понимаете: если это обнаружится, принимающий оставляет за собой право отказаться от дальнейшего приёма задач у Вас.
4. После каждой задачи указана «стоимость» задачи (или отдельных её пунктов) в баллах. Сумма набранных баллов используется в алгоритме определения итоговой оценки. Максимальная сумма баллов равна 125.

Задача 1 (5)**.** Для уравнений $\dot{x} = f(x,t)$, где $f \in C(\mathbb{R}^2)$, справедлива теорема существования (но не единственности!) решений — теорема Пеано. Рассмотрим множество C_τ значений $x(\tau)$ для всех решений x задачи Коши $\dot{x} = f(x,t)$, $x(t_0) = x_0$. Докажите, что множество C_τ связно. *Указание.* Теорема о продолжении решения до границы компакта верна и в этом контексте.

Задача 2 (3+3+5)**.** Рассмотрим дифференциальное уравнение $y' = \dfrac{y^2(1+x^2)}{xy+1}$.

а) Докажите, что его решения не могут иметь вертикальную асимптоту $x = x_0$ при $x_0 \neq 0$.

б) Докажите, что имеется минимум два решения, имеющие $x = 0$ вертикальной асимптотой (одно определено в левой, другое в правой полуокрестности нуля).

в) Докажите, что этих решений ровно два.

Задача 3 (3)**.** Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(Sf)(x) = \frac{f'''(x)f'(x) - (3/2)(f''(x))^2}{(f'(x))^2}$$

(он называется *производной Шварца*). Решите дифференциальное уравнение $Sf = 0$.

Задача 4 (3)**.** Рассмотрим *уравнение Риккати* $\dot{w} = \alpha(t) + \beta(t)w + \gamma(t)w^2$. Пусть $X_{t_0,t_1}(w)$ — отвечающие ему операторы Коши. Докажите, что $SX_{t_0,t_1} \equiv 0$ при любых t_0, t_1, явно вычислив производную $(d/dt)(SX_{t_0,t})$.

Задача 5 (3)**.** Рассмотрим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(t)x + b(t)y, \\ \dot{y} &= c(t)x + d(t)y. \end{aligned}$$

Поскольку она обладает группой симметрий $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$, для величины $z = x/y$ корректно задано дифференциальное уравнение. Выпишите его и объясните, как тогда из задачи 3 получить задачу 4.

Задача 6 (4). Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$, которое задаёт колебания маятника (x — угол отклонения от вертикали). Докажите, что $H = \dfrac{\dot{x}^2}{2} - \omega^2 \cos x$ — его первый интеграл, и постройте *фазовый портрет* этого уравнения, то есть нарисуйте, как качественно выглядит разбиение плоскости с координатами $(x, \dot{x})$ на траектории этого уравнения. На траекториях поставьте стрелки, показывающие направление движения. Объясните, каким движениям маятника отвечают разные типы траекторий.

Задача 7 (3+2+2+5). Для уравнения из предыдущей задачи рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = \varepsilon,\ \dot{x}(0) = 0, \quad \text{где } \varepsilon \in (-\pi, \pi).$$

а) Разложите решение этой задачи Коши в ряд Тейлора до $o(\varepsilon^3)$ при каждом t:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \varepsilon^3 x_3(t) + o(\varepsilon^3).$$

б) Объясните, почему неограниченно возрастающая функция $x_3(t)$ не противоречит периодичности $x(t, \varepsilon)$, полученной в предыдущей задаче.
в) Найдите первый нетривиальный член в асимптотике периода колебания $T = T(\varepsilon)$:

$$T(\varepsilon) = T_0 + T_1 \varepsilon^\gamma + o(\varepsilon^\gamma), \quad T_1 \neq 0.$$

г) Докажите, что при любом $\varepsilon \in (-\pi, \pi)$ верно, что $T(\varepsilon) \geq T_0$.

Задача 8 (3). Рассмотрим уравнение

$$y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

где $a_j \in C(\mathbb{R})$. Пусть y_1, y_2 — два его решения, не пропорциональных друг другу. Может ли функция

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

обращаться в нуль в бесконечном числе точек на отрезке $[0, 1]$?

Задача 9 (1+1+2+2). Найдите наименьшее n, для которого уравнение

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{x} + a_0 x = 0$$

а) имеет решение $x_1(t) = \sin^2 t$, если $a_j \in \mathbb{R}$;
б) имеет решение $x_2(t) = t \sin t$, если $a_j \in \mathbb{R}$;
в), г) те же вопросы, если $a_j \in C(\mathbb{R})$.

Задача 10 (5). Докажите, что любое решение уравнения $\ddot{x} + tx = 0$ обращается в ноль бесконечное число раз при $t > 0$, причём расстояния между соседними нулями стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Задача 11 (1+2). Можно ли выпрямить (перевести диффеоморфизмом в $\partial/\partial x$) на всей плоскости векторные поля: а) $x\,\dfrac{\partial}{\partial x} - y\,\dfrac{\partial}{\partial y}$, б) $\sin x\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \cos x\,\dfrac{\partial}{\partial y}$?

Задача 12 (3+3). Рассмотрим следующие векторные поля на прямой:

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad 2\sin x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin^2 x\,\frac{\partial}{\partial x}, \quad \sin 2x\,\frac{\partial}{\partial x}.$$

Для каждой пары векторных полей из этого списка выясните:
а) можно ли перевести их друг в друга диффеоморфизмом прямой;
б) можно ли сопрячь их потоки гомеоморфизмом прямой (существует ли гомеоморфизм h, для которого $h \circ g_u^t(x) = g_v^t \circ h(x)$ при всех t и x).
Указание. Посмотрите на особые точки этих векторных полей и на поведение решений между ними.

Задача 13 (4)**.** Пусть $v = \sum_{i=1}^n v_i(\partial/\partial x_i)$ — гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что оно сохраняет объём (то есть $\operatorname{Vol} A = \operatorname{Vol}(g_v^t A)$ для любой области A и любого t) тогда и только тогда, когда его *дивергенция* $\operatorname{div} v := \sum \partial v_i/\partial x_i$ равна нулю во всех точках.

Задача 14 (4)**.** Пусть векторное поле из предыдущей задачи (с $\operatorname{div} v = 0$) имеет первый интеграл F. Найдите функцию h, такую что для любой области Λ на поверхности $M_c = \{F = c\}$ и любого t верно

$$\int_\Lambda h\,dS = \int_{g^t\Lambda} h\,dS.$$

Здесь dS обозначает элемент площади поверхности M_c.

Задача 15 (4)**.**[1] Считая известными свойства производной Ли, включая формулу Картана, решите две предыдущие задачи для векторного поля на многообразии: найдите условие того, что векторное поле v сохраняет данную форму объёма ω, а также найдите, какую форму объёма α на поверхности $M_c = \{F = c\}$ сохраняет в этом случае поле $v|_{M_c}$. Ответ должен быть дан в бескоординатных терминах.

Задача 16 (1+2+2+1)**.** Векторное поле $\dot{x} = v(x)$ в $\mathbb{R}^n$ (или на многообразии) имеет периодическое решение: $g^{t_0}(x_0) = x_0$, $t_0 > 0$. Рассмотрим дифференциал $dg^{t_0}|_{x_0} \colon T_{x_0}\mathbb{R}^n \to T_{x_0}\mathbb{R}^n$ отображения потока за период.
а) Докажите, что 1 — собственное значение этого линейного оператора.
б) Пусть M — $(n-1)$-мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$, проходящая через точку x_0, причём

$$T_{x_0}M \oplus \langle v(x_0)\rangle = T_{x_0}\mathbb{R}^n$$

(тогда говорят, что M *трансверсальна* к векторному полю v в x_0). Пусть также t_0 — минимальный период x_0 под действием потока этого векторного поля. Докажите, что для всех $y \in M$, достаточно близких к x_0, полутраектория $O^+(y) = \{g^t(y), t > 0\}$ пересечёт M, причём если $\tau(y)$ — момент первого пересечения с M, то $\tau(y)$ стремится к t_0 при $y \to x_0$.
в) Рассмотрим отображение $P(y) = g^{\tau(y)}(y)$. Докажите, что в малой окрестности x_0 это локальный диффеоморфизм M в себя (его называют *отображением Пуанкаре* на трансверсали M).
г) Как соотносятся дифференциалы $dP|_{x_0}$ и $dg^{t_0}|_{x_0}$? Как связаны их спектры?
Указание. Полезно выпрямить векторное поле в окрестности x_0. К какому наиболее простому виду можно привести при этом поверхность M?

Задача 17 (3+2)**.** а) Пусть векторное поле v на плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет периодическое решение (все обозначения как в предыдущей задаче). Покажите, что производная отображения Пуанкаре равна якобиану отображения g^{t_0} и равна

$$\exp\left(\int_0^{t_0} \operatorname{div} v(g^t(x_0))\,dt\right).$$

Указание. Воспользуйтесь формулой Лиувилля—Остроградского для уравнения в вариациях вдоль этой периодической траектории.
б) Дайте определение устойчивости по Ляпунову периодической траектории, аналогичное такому для особой точки. Как с помощью предыдущего пункта можно исследовать (не)устойчивость периодической траектории?

Задача 18 (2+1+1+2+1)**.** Рассмотрим (C^1-гладкое) векторное поле на многообразии, все траектории которого неограничено продолжаются вперёд по времени. *ω-предельным множеством точки x* называется множество $\omega(x)$ таких y, для которых существует последовательность

[1] Студентам Совбака, решившим задачи 13 и 14, эта задача засчитывается автоматически.

$t_1 \geq t_2 \geq \dots$, $t_j \to \infty$, для которой $g^{t_j}(x) \to y$.
а) Докажите, что ω-предельное множество замкнуто и инвариантно относительно преобразований потока.
б) Докажите, что для компактных многообразий ω-предельное множество непусто, и приведите пример пустого ω-предельного множества в некомпактном случае.
в) Докажите, что для компактных многообразий ω-предельное множество связно.
Указание. Траектории придётся ходить из окрестности одной компоненты в окрестность другой компоненты бесконечно много раз.
г) Приведите пример несвязного ω-предельного множества в некомпактном случае.
Указание. Нарисуйте фазовый портрет векторного поля, у которого окружность является ω-предельным множеством какой-то точки, после чего попробуйте «утащить в бесконечность» две точки на этой окружности.
д) Для векторных полей на прямой и окружности опишите, как найти ω-предельные множества каждой точки.

Задача 19 (5)**.** Рассмотрим векторное поле v на двумерной сфере. Пусть ω-предельное множество точки x содержит точку p с $v(p) \neq 0$. Докажите, что либо траектория точки p периодична, либо $\omega(p)$ состоит только из точек q с $v(q) = 0$. Пусть также $\omega(p)$ содержит точку q. Докажите, что $v(q) = 0$.
Указание («мешок Бендиксона»). Если $v(q) \neq 0$, выпрямим векторное поле в её окрестности. Орбита точки p пересекает эту окрестность по бесконечному числу «горизонтальных» отрезков, пусть p_j — точки их пересечения с «вертикальным» отрезком через точку q. Тогда кривая, состоящая из фрагмента $p_j p_{j+1}$ орбиты точки p и вертикального отрезка с теми же концами обладает таким свойством: она разделяет сферу на две компоненты связности, «мешок» и его дополнение, и траектория векторного поля, начавшаяся в мешке, покинуть его не сможет.

Задача 20 (3)**.** Рассмотрим векторное поле v на двумерной сфере. Пусть точка x непериодична и неособа. Могут ли её ω-предельное и α-предельное множество содержать общую точку? общую точку, где $v \neq 0$? (Определение α-предельного множества отличается от определения ω-предельного тем, что последовательность (t_j) монотонно убывает и стремится к $-\infty$.)

Задача 21 (4)**.** Рассмотрим векторное поле v на проективной плоскости. Может ли непериодическая траектория иметь α- и ω-предельным множеством одну и ту же периодическую траекторию?

Задача 22 (1+1+1+2+3+2+2+5+2)**.** Осциллятор ван дер Поля задаётся следующей системой уравнений на плоскости:

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = -u + k(1 - u^2)v,$$

где $k > 0$ — параметр.
а) На плоскости (u, v) укажите области, где векторное поле имеет направление в одном из четырёх квадрантов.
б) Постройте линеаризацию векторного поля в нуле и определите тип этой особой точки.
в) Пусть $\rho = u^2 + v^2$. Найдите $d\rho/dt$ и покажите, что никакая траектория не может войти в круг $D_c = \{\rho \leq c\}$, где $c < 1$, а любая траектория (кроме особой точки), начинающаяся в D_c, оттуда выходит.
г) Докажите, что все траектории этой системы неограничено продолжаются по времени вперёд, и более того, все они попадают в некоторую ограниченную область Ω (постройте её).
д) Приведите пример траектории этой системы, которая не продолжается неограниченно назад по времени.
е) Покажите, что ω-предельное множество любой траектории (кроме особой точки) — это периодическая траектория, охватывающая начало координат.

ж) Покажите, что всякая периодическая траектория является центрально-симметричной.
Указание. Образ траектории при симметрии относительно нуля — снова траектория этой системы.)
з) Докажите, что всякая периодическая траектория устойчива.
Указание. $\operatorname{div} V = k(1-u^2) = -\dot{\rho}/(2v^2)$. Рассмотрим половину траектории, лежащую в верхней полуплоскости. Там ρ сначала растёт, потом убывает, потом снова растёт до исходного значения. Интеграл от дивергенции разбивается на пары маленьких кусочков, где $\rho \in [\rho_0, \rho_0 + \Delta\rho]$. Докажите, что отрицательный вклад того кусочка, где ρ растёт, перевешивает положительный вклад кусочка, где ρ убывает.
и) Докажите, что периодическая траектория этой системы единственна.