

# Классическая теория поля 2020

## Листок 1. Принцип наименьшего действия и законы сохранения

Срок сдачи: до 14 октября 2020

**1. Регулятор Уатта** (*Джеймс Уатт, 1788*) состоит из четырех одинаковых стержней OA, OB, AC и BC длины  $\ell$ , двух грузов A и B, имеющих массу  $m$  каждый, и муфты C массы  $M$ , которая может скользить вдоль вертикальной оси Oz, проходящей через неподвижную точку O (см. рис.1). Вся система может вращаться вокруг оси Oz. Масса стержней и трение пренебрежимо малы. На грузы действует однородная сила тяжести, направленная против оси Oz.

- Выбрав подходящий набор обобщенных координат, постройте действие этой механической системы.
- Определите выполняющиеся в ней законы сохранения.

**2. Одномерная релятивистская частица.** Материальная точка движется вдоль оси Ox декартовой прямоугольной системы координат. Ее динамика определяется действием

$$S[x(t)] = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{c^2 - \dot{x}^2} dt, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

где  $\alpha$  и  $c$  — положительные вещественные константы. Функционал  $S$  определен на траекториях, для которых  $|\dot{x}(t)| \leq c$ .

- Пусть  $x(t)$  траектория “медленного” движения частицы, то есть, в любой момент времени ее скорость много меньше  $c$ :  $|\dot{x}(t)| \ll c$ . Разложите действие  $S$  в ряд по малому параметру  $\dot{x}/c$  (достаточно привести 3 первых слагаемых) и предложите физическую интерпретацию константы  $\alpha$ .
- Докажите, что множество однопараметрических преобразований с вещественным параметром  $\theta$

$$\begin{cases} \tilde{t} = t \operatorname{ch}\theta - (x/c) \operatorname{sh}\theta \\ \tilde{x} = x \operatorname{ch}\theta - ct \operatorname{sh}\theta \end{cases} \quad \text{где} \quad \operatorname{ch}\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}, \quad \operatorname{sh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2},$$

образует группу симметрий рассматриваемой механической системы и выпишите выражение для Нётеровского интеграла движения. Какое ограничение налагается на скорости  $d\tilde{x}/d\tilde{t}$ ?

**3.** Материальная точка массы  $m$  движется в однородном силовом поле по прямой:  $L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + mgx$ . Определите закон сохранения, отвечающий преобразованию симметрии  $\tilde{t} = t$ ,  $\tilde{x} = x + \epsilon$ .

**4. Задача о брахистохроне** (*Иоганн Бернулли, 1696*). Материальная точка, начальная скорость которой равна 0, движется без трения в вертикальной плоскости под действием силы тяжести по некоторой кривой, соединяющей две заданные точки, начальную и конечную. Задача состоит в том, чтобы найти такую кривую, называемую брахистохроной, движение по которой из начальной точки в конечную занимает наименьшее время. Пользуясь вариационным принципом, составьте дифференциальное уравнение брахистохроны. Определите форму брахистохроны, используя аналог закона сохранения энергии при интегрировании дифференциального уравнения.

5. Найдите дифференциальные уравнения, характеризующие экстремали функционала

$$S[q^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, \ddot{q}^i) dt$$

на траекториях с фиксированными координатами и скоростями в начальный и конечный моменты времени:  $q^i(t_1) = q_1^i, \dot{q}^i(t_1) = \dot{q}_1^i, q^i(t_2) = q_2^i, \dot{q}^i(t_2) = \dot{q}_2^i$ .

Что изменится, если искать решение этой вариационной задачи на множестве траекторий с фиксированными координатами, но произвольными скоростями в начальный и конечный моменты времени?

6. Однородная балка прямоугольного сечения с постоянной толщиной и шириной прогибается под действием силы тяжести. Потенциальная энергия упругой деформации балки в главном приближении имеет вид

$$U_{\text{упр}} = \kappa \int_0^L dx (y''(x))^2,$$

где  $L$  – длина балки,  $\kappa$  – коэффициент, зависящий от размеров сечения и материала балки, а функция  $y(x)$  задает отклонение средней линии балки вниз от горизонтали (см. рис.2). В состоянии равновесия потенциальная энергия балки минимальна. Определите форму балки для трех нижеперечисленных граничных условий.

- Мостик: концы балки свободно лежат на двух опорах, опоры расположены на одной высоте.
- Перекрытие (потолок): балка обоими концами горизонтально вмонтирована в стену.
- Балкон: балка одним концом горизонтально вмонтирована в стену, а другой ее конец не закреплен.

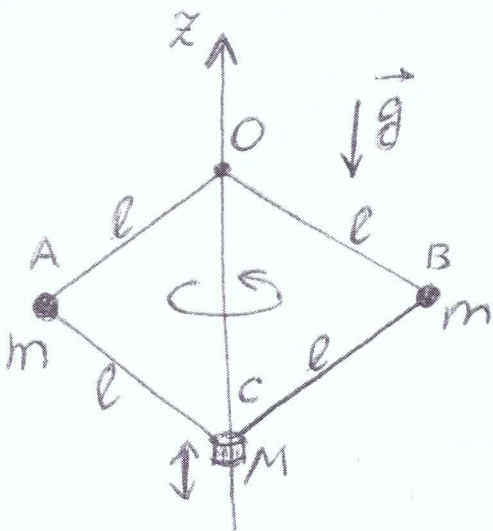


рис. 1.

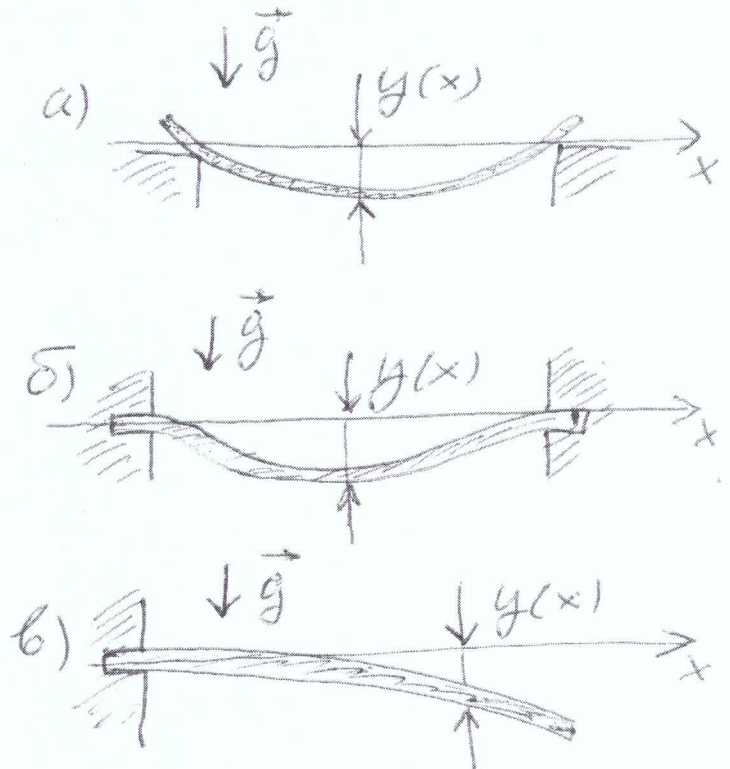


рис. 2.