Прикладные методы анализа 2020
Занятие 15.09.2020

Осциллятор под внешним воздействием. Функции Грина.

***Задача* 1.** Требуется описать движение математического маятника, т. е. найти и решить уравнения движения для грузика массы m, совершающего колебания на невесомой и нерастяжимой нити длиной l без трения в поле тяжести с ускорением свободного падения g (см. рисунок 1).

Уравнения движения определяются *2-м законом Ньютона*, согласно которому произведение массы тела m на его ускорение $\vec{a}$ в некоторой инерциальной системе отсчёта равно сумме всех действующих на него сил,

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i.$$

В системе отсчёта, выбранной как показано на рисунке, имеем два уравнения на проекции ускорения на оси OX и OY:

$$m\ddot{x}(t) = -T\sin\varphi(t), \tag{1}$$

$$m\ddot{y}(t) = mg - T\cos\varphi(t). \tag{2}$$

Эта система сводится к одному уравнению

$$\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\operatorname{ctg}\varphi(t) = g \tag{3}$$

на две неизвестные функции $x(t)$ и $y(t)$. Необходимое дополнительное уравнение даётся *кинематической связью*, следующей из условия

$$x^2(t) + y^2(t) = l^2,$$

эквивалентного уравнениям

$$x(t) = l\sin\varphi(t), \qquad y(t) = l\cos\varphi(t).$$

Дифференцируя эти уравнения дважды и подставляя полученные выражения для ускорения $(\ddot{x}, \ddot{y})$ в (3), получаем уравнение на одну неизвестную функцию – угол отклонения от положения равновесия $\varphi(t)$

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2\sin\varphi(t) = 0, \qquad \omega^2 = g/l > 0. \tag{4}$$

Если колебания маятника таковы, что $\varphi^{k+1} << \varphi^k$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $\sin\varphi \approx \varphi$ и уравнение (4) сводится к линейному уравнению вида

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega^2\varphi(t) = 0,$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка описывает гармонические колебания, его решения хорошо известны.

В случае же, когда угол φ не мал и меняется в пределах $[-\pi/2, +\pi/2]$, уравнение движения, как мы видим из (4), является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Но несмотря на свою нелинейность, уравнение (4) тоже решается, точнее – его решение можно найти в квадратурах. Действительно, умножив это уравнение на $\dot{\varphi}$, его можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega^2\cos\varphi\right) = 0. \tag{5}$$

Последнее означает, что выражение в скобках равно некоторой константе C. Параметризуем C другой константой φ_0 через соотношение $C = -\omega^2 \cos\varphi_0$. Тогда из (5) получаем

$$\dot{\varphi}^2 = 4\omega^2 \left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right). \tag{6}$$

Отсюда находим параметр эволюции t в терминах интеграла от некоторой функции угла φ

$$\pm\omega t = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \tag{7}$$

Выбрав знак $+$ в левой части и вводя новую переменную θ, связанную с φ посредством уравнения

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\sin\theta,$$

после очевидных преобразований из (7) получаем выражение

$$\omega t = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\theta}}. \tag{8}$$

Это выражение (8) и есть ответ в квадратурах для решения уравнения движения математического маятника. Вводя обозначение $\kappa = \sin(\varphi_0/2)$ и задав пределы интегрирования в (8) от 0 до некоторого параметра α, получаем, что ответ даётся *нормальным эллиптическим интегралом Лежандра 1-го рода*,

$$\omega t = F(\alpha;\kappa) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2\sin^2\theta}}. \tag{9}$$

Заметим также, что и гармонические колебания, возникающие в задаче с грузом на пружине и подчиняющиеся закону Гука $\vec{F} = -k\vec{x}$, описываются линейным уравнением только в приближении малых отклонений от положения равновесия.

Задача 2. Прежде чем перейти к следующей теме (о причинной функции Грина), вспомним результат рассмотрения *задачи Коши* для линейного осциллятора под действием вынуждающей силы,

$$x(t) = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\tau G^R(t;\tau) f(\tau),$$

где G^R – т. н. запаздывающая функция Грина вида

$$G^R(t;\tau) = \Theta(t-\tau)[x_2(t)x_1(\tau) - x_1(t)x_2(\tau)],$$

Θ – функция Хевисайда, а (x_1, x_2) – фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения, описывающего свободный осциллятор. Здесь мы полагаем, что вронскиан равен 1. При этом, если частота осциллятора постоянна, $\omega(t) = \omega_0$, то два независимых решения x_1 и x_2 могут быть выбраны в виде

$$x_1(t) = \cos\omega_0(t - t_i), \qquad x_2(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0(t - t_i).$$

И тогда функция Грина G^R для рассматриваемой задачи Коши принимает вид

$$G^R(t;\tau) = \Theta(t-\tau)\frac{\sin\omega_0(t-\tau)}{\omega_0}.$$

Вариационный принцип. Уравнения движения.

Уравнения движения механических (и вообще – динамических) систем можно получать из *принципа стационарного действия*. Его суть в том, что если система, эволюция которой описывается функцией $q(t)$, в момент времени t_i находится в состочнии $q_i = q(t_i)$ (это, например, начальная точка траектории частицы), а в момент времени $t_f > t_i$ – в состоянии $q_f = q(t_f)$ (конечная точка траектории частицы), то эволюция системы от q_i до q_f (движение частицы), происходит таким образом, что *функционал действия*

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t L(q,\dot{q})$$

остаётся стационарным, $\delta S = 0$. Здесь δ означает вариацию функционала с учётом начальных данных. Функция $L(q,\dot{q})$ называется *лагранжианом* системы. Заметим, что эта функция определена с точностью до полной производной по времени: лагранжианы, отличающиеся на такую полную производную по времени, эквивалентны с точки зрения этого вариационного принципа,

$$L \sim L + \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}$$

Но физические свойства соответствующих систем могут сильно различаться в зависимости от свойств функции σ. Из требования исчезновения вариации $\delta S[q] = S[q+\delta q] - S[q]$ для любых малых вариаций траектории $\delta q(t)$, при условии, что вариации начальных данных отсутствуют, $\delta q(t_i) = 0 = \delta q(t_f)$, следуют *уравнения Эйлера–Лагранжа*,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{10}$$

Описанный выше принцип был получен Эйлером (как вариационный аналог поиска экстремума функций) и Лагранжем (как метод нахождения уравнений движения механических систем).

Для системы из предыдущей задачи (с математическим маятником) функционал действия даётся интегралом

$$S[\varphi] = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \omega^2(\cos\varphi - 1)].$$

(Потенциал $\omega^2(1-\cos\varphi)$ выбирается в таком виде из некоторых *физических соображений*.) Приравняв его вариацию к нулю с учётом начальных условий ($\varphi(t_i) = \varphi_i$, $\varphi(t_f) = \varphi_f$), мы получаем уравнение (4). Заметим, что если L не зависит явно от времени, то функция энергии, задаваемая формулой

$$E(q,\dot{q}) = \dot{q}\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}} - L(q,\dot{q}),$$

сохраняется во времени, $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$. Нетрудно видеть, что константа C, для которой мы ввели параметризацию через φ_0, $C = -\omega^2\cos\varphi_0$, и есть энергия математического

маятника,
$$E(\varphi,\dot\varphi)=\frac{\dot\varphi^2}{2}-\omega^2\cos\varphi,\qquad \dot E=0.$$
Если же лагранжиан явно зависит от времени, то изменение функции энергии во времени даётся формулой
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$$
Для нашего случая – осциллятора с переменной частотой $\omega(t)$ и внешним воздействием $f(t)$ – функцию Лагранжа можно выбрать в виде
$$L(x,\dot x,t)=\frac{1}{2}\dot x^2-\frac{1}{2}\omega^2(t)x^2+f(t)x.$$
Соответствующее уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид
$$-\omega^2(t)x^2+f(t)-\ddot x=0,$$
что совпадает с рассмотренным ранее уравнением. Здесь мы также учитываем *неварьируемые начальные данные* $x(t_i)=x_i$ и $x(t_f)=x_f$. Мы видим, что это то же самое неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, но с совершенно другими дополнительными условиями: вместо условий (задачи Коши) на координату и скорость в один и тот же момент времени $x(t_i)=\dot x(t_i)=0$, здесь мы имеем *краевые условия* на функцию координаты, $x(t_i)=x_i$ и $x(t_f)=x_f$.

Найдём теперь *причинную функцию Грина* дл осциллятора с постоянной частотой $\omega(t)=\omega_0$ и граничными условиями $x(t_i)=x(t_f)=0$. Однородное уравнение имеет общее решение
$$x(t)=A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t.$$
Постоянные коэффициенты A и B можно правильно закодировать в t_i и t_f, выбрав два линейно независмых решения
$$x_1(t)=\sin\omega_0(t-t_i),\qquad x_2(t)=\sin\omega_0(t_f-t).$$
При этом вронскиан системы
$$W=-\omega_0\sin\omega_0(t_f-t_i)$$
будет отличен от 0, если только $\omega_0(t_f-t_i)\neq\pi k,\qquad k\in\mathbb{Z}_+$.

Вспомним, что общее решение неоднородного уравнения было найдено в виде
$$x(t)=\frac{1}{W}\int_t^{t_1}\mathrm{d}\tau x_1(t)x_2(\tau)f(\tau)+\frac{1}{W}\int_{t_2}^{t}\mathrm{d}\tau x_1(\tau)x_2(t)f(\tau).$$
После некоторых простых преобразований (NB! параметры t_1 и t_2 однозначно фиксируются значениями t_i, t_f) и с использованием функции Хевисайда это выражение сводится к следующему:
$$x(t)=\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}\tau G^F(t;\tau)f(\tau),$$
где $G^F(t;\tau)$ есть т. н. *причинная функция Грина* задачи,
$$G^F(t;\tau)=-\frac{1}{\omega_0\sin\omega_0(t_f-t_i)}\Big[\Theta(0\tau-t)\sin\omega_0(t-t_i)\sin\omega_0(t_f-\tau)$$
$$+\Theta(t-\tau)\sin\omega_0(t_f-t)\sin\omega_0(\tau-t_i)\Big].$$

Итак, решение разных задач о гармонических колебаниях даются *линейным функционалом* от внешней силы $f(t)$, заданной в промежутке времени $[t_i, t_f]$. Конкретно, этот функционал определяется функцией Грина задачи

$$x(t) = \int_{t_i}^{t_f} G(t;\tau) f(\tau).$$

Потребовав, что внешнее воздействие $f(t)$ выключается (равно 0) вне промежутка $[t_i, t_f]$, последнее выражение можно записать в виде интеграла по всей вещественной оси,

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau G(t;\tau) f(\tau) \equiv (G_t, f).$$

Обозначение в правой части испольовано для свёртки двух функций (оно будет использоваться позже).

Задача 3. Найти решения следующих трёх задач, сопроводив их пояснениями:

- $$\ddot{x}(t) + x(t) = 2t - \pi,$$
  $$x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 0.$$

  Общее решение имеет вид

  $$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2t - \pi,$$

  где константы должны удовлетворять условиям

  $$x(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 - \pi = 0,$$
  $$x(\pi) = C_1 \cdot 0 - C_2 \cdot 1 + \pi = 0,$$

  откуда получаем $C_2 = \pi$, а C_1 может принимать любые значения. Поэтому имеем не единственное решение, а целое параметрическое семейство решений,

  $$x(t) = \pi \cos t + 2t - \pi + C \sin t.$$

- $$\ddot{x}(t) + x(t) = 1,$$
  $$x(0) = 0, \qquad x(\pi/2) = 0.$$

  Общее решение

  $$x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t + 1.$$

  Условия на константы фиксируют их однозначно,

  $$C_1 = C_2 = -1.$$

  В результате имеем единственное решение задачи $x(t) = -\sin t - \cos t + 1$.

- $$\ddot{x}(t) + x(t) = 1,$$
  $$x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 0.$$

  Здесь общее решение такое же, как и выше, но условия на константы

  $$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + 1 = 0, \qquad C_1 \cdot 0 - C_2 \cdot 1 + 1 = 0$$

  противоречивы. Решение не существует.

Объяснение такое, что оператор
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2$$
может быть вырожден на множестве функций, удовлетворяющих заданным краевым условиям. Если его ядро тривиально, то оператор обратим и решение существует и единственно. Если же он имеет нетривиальное ядро, то либо решения нет вообще, либо оно существует, но не единственно.

Для самостоятельного решения (разобрали у доски): краевая задача
$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) + x(t) = f(t), \\ &x(0) = 0, \qquad x(\pi/2) = 0. \end{aligned}$$
Нашли решение в виде
$$x(t) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\tau \, G(t;\tau) f(\tau),$$
где причинная функция Грина имеет явный вид
$$G(t;\tau) = \begin{cases} -\cos t \sin\tau, & 0 \le t \le \tau, \\ -\sin t \cos\tau, & \tau \le t \le \pi/2, \end{cases}$$
что может быть записано с помощью функции Хевисайда как
$$G(t;\tau) = -\Theta(t-\tau)\sin t \cos\tau - \Theta(\tau - t)\cos t \sin\tau.$$

Задача 4. Явление резонанса (для домашнего самостоятельного решения). На линейный гармонический осциллятор в момент времени $t = T$ начинает действовать вынуждающая сила $f(t) = f_0 \sin\Omega t$, где $\Omega T = 2\pi$. Решить задачу Коши
$$\begin{aligned} &\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \Theta(t-T) f_0 \sin\Omega t, \\ &x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = 0, \end{aligned}$$
и найти зависимость амплитуды и фазы колебаний осциллятора от параметров вынуждающей силы (f_0, Ω) в момент времени T.

Задача 5. Рассмотреть дискретную версию краевой задачи для осциллятора с вынуждающей силой:
$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t), \qquad x(t_i) = 0 = x(t_f).$$
Найти непрерывный предел для свободной частицы ($\omega = 0$) под внешним воздействием.

Задача 6. Найти два решения уравнения
$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{4t^2} x(t) = 0, \qquad t > 0,$$
с начальными условиями a) $x(1) = 1$, $\dot{x}(1) = 0$ и b) $x(1) = 0$, $\dot{x}(1) = 1$.

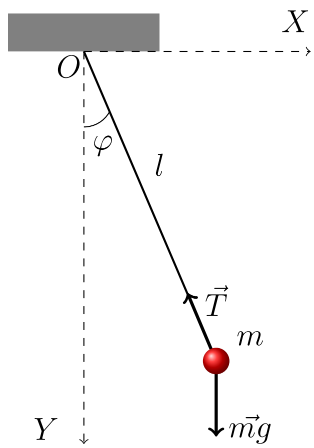

Рис. 1. Математический маятник: колебания грузика в поле тяжести без трения на невесомой, нерастяжимой нити