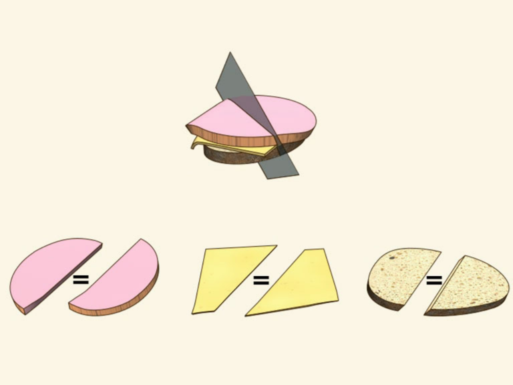
Приложения теоремы Борсука-Улама

Егор Крылов

2020

Теорема о бутерброде

- Бутерброд из хлеба, сыра и колбасы можно разрезать одной плоскостью так, чтобы в обеих частях было одинаковое (по объёму) количество колбасы, а также одинаковое количество сыра и хлеб



Теорема о бутерброде

- Если дано n измеримых «объектов» в n-мерном евклидовом пространстве, их можно разделить пополам (согласно их мере, то есть объёме) с помощью одной $(n-1)$ - мерной гиперплоскости.

Доказательство для n=3

- Возмем произвольный вектор, проведенный из начала координат и построим все препендикулярные ему ориентированые плоскости. Эти плоскости пересекают "колбасу" по каким-то прямым

Доказательство для n=3

- Возмем произвольный вектор, проведенный из начала координат и построим все препендикулярные ему ориентированые плоскости. Эти плоскости пересекают "колбасу" по каким-то прямым
- Существует ориентированая плоскость, для которой объем "колбасы" с положительной стороны равен 0. Так же существет ориантированная плоскость, для которой объем с положительной стороны равен всем объему "колбасы". По теореме о промежуточном значении существует плоскость, которая делит "колбасу" пополам.

Доказательство для n=3

- Каждому вектору p будем ставить в соответствие плоскость $\pi(p)$. Теперь построим функцию $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ следующим образом: $f(p) = (V_1, V_2)$, где V_1 и V_2 - объемы "хлеба" и "сыра" с положительной стороны плоскости.

Доказательство для n=3

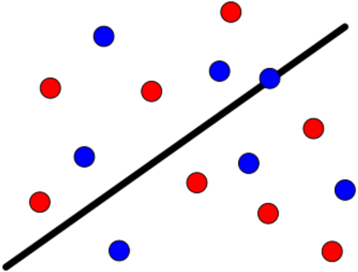
- Каждому вектору p будем ставить в соответствие плоскость $\pi(p)$. Теперь построим функцию $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ следующим образом: $f(p) = (V_1, V_2)$, где V_1 и V_2 - объемы "хлеба" и "сыра" с положительной стороны плоскости.
- По теореме Борсука — Улама существуют антиподальные точки p и q на сфере $\mathbb{S}$, такие что $f(p) = f(q)$.

Доказательство для n=3

Антиподальные точки p и q соответствуют плоскостям $\pi(p)$ и $\pi(q)$, которые равны за исключением ориентации положительной стороны. Это означает, что объем "хлеба" и "сыра" тот же самый с положительной и отрицательной сторны $\pi(p)$ (или $\pi(q)$). Таким образом, $\pi(p)$ - искомая плоскость

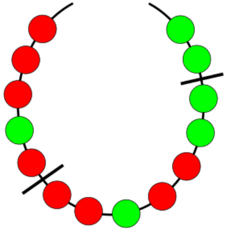
Дискретная формулировка

Пусть $A_1, A_2, ..., A_d \in \mathbb{R}^d$ - непересекающиеся конечные множества точек, такие что в любой гиперплоскости содержится не более d точек из $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_d$.
Тогда существует гиперплоскость h, которая делит попалам каждое A_i так, что в каждом открытом полупространстве, определяемом h содержится ровно $\lfloor \frac{|A_i|}{2} \rfloor$ точек, а на гиперплоскости h не более одной точки из A_i



Задача о разрезании ожерелья

Необходимо разделить ожерелье, состоящие из n камней разного вида, между двумя ворами так, чтобы было выполнено минимальное число надрезов.
Мы предполагаем, что ожерелье открыто (с двумя концами) и что есть разные виды камней (четное число каждого вида). Утверждение состоит в том, что необходимо не более d разрезов



Теорема об ожерелье

Каждое (открытое) ожерелье с d видами камней можно разделить между двумя ворами, используя не более d разрезов

Теорема об ожерелье

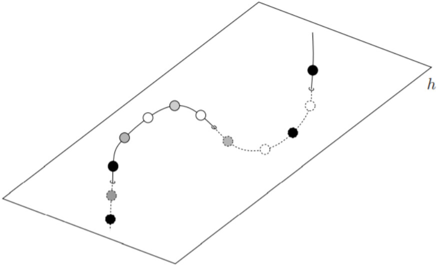
Каждое (открытое) ожерелье с d видами камней можно разделить между двумя ворами, используя не более d разрезов

Доказательство:

Поместим ожерелье в $\mathbb{R}^d$ вдоль кривой моментов. Пусть $\gamma(t) = (t, t^2, t^3, ..., t^d)$ - параметризация кривой моментов γ. Если ожерелье содержит n камней, определим

$A_i = \{\gamma(k) : k\text{-номер камня данного вида}\}$

A_i - множества камней одного вида



Доказательство

По теореме о бутерброде существует гиперплоскость h, одновременно разделяющая пополам каждое A_i.

Доказательство

По теореме о бутерброде существует гиперплоскость h, одновременно разделяющая пополам каждое A_i.
При подстановке точки $(t, t^2, ..., t^d)$ в уравнение гиперплоскости мы получим уравнение порядка d, которое имеет не более d корней.

Доказательство

По теореме о бутерброде существует гиперплоскость h, одновременно разделяющая пополам каждое A_i.
При подстановке точки $(t, t^2, ..., t^d)$ в уравнение гиперплоскости мы получим уравнение порядка d, которое имеет не более d корней.

Гиперплоскость h делит кривую моментов и ожерелье, лежащее вдоль неё не более чем в d местах. Так как по условию все A_i содержат четное число камней, h камней не содержит, и разрезание удовлетворяет условию теоремы