Математическая теория игр:

Домашнее задание №2

1. Доказать теорему Борсука-Улама (БУТ) для окружности, т.е. для $n = 1$.

2. Привести набросок доказательства БУТ для $n = 2$ (подсказка: П1, П3).

3. Показать, что утверждение БУТ останется в силе: если «антиподы» определять не с помощью прямых, проходящих через центр сферы S, а с помощью прямых, проходящих через любую точку Q, лежащую внутри сферы.

4. Доказать лемму Таккера для $n = 2$.

5. Вывести лемму Таккера из БУТ (П3).

6. Доказать теорему о блинах. (см. П2)

7. Пусть A – шар, B – куб и C – цилиндр. Указать (явно) плоскость, разрезающую каждое из этих трех тел на две равные по объему части.

8. Привести набросок доказательства теоремы о бутерброде (П1,П2).

9. Привести набросок доказательства «теоремы о бутерброде» для конечных множеств (П2,П3).

10. Привести набросок доказательства теоремы об ожерелье (П2).

11. Докажите эквивалентность формулировок теоремы Борсука-Улама:

    (i) Для непрерывной функции $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{S}^n$ - сфера в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве, существуют такие две диаметрально противоположные точки a и $-a \in \mathbb{S}^n$, что $f(a) = f(-a)$.

    (ii) Всякая нечётная (относительно диаметральной противоположности) непрерывная функция $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ из n-мерной сферы в n-мерное евклидово пространство в некоторой точке $a \in \mathbb{S}^n$ обращается в нуль: $g(a) = 0$.

Подсказки: скачать по ссылке.

П1. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. М. 1967.
П2. Презентация Егора Крылова.
П3. J Matoušek, Using the Borsuk-Ulam Theorem, Springer, 2003.