

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО  
11 СЕНТЯБРЯ 2020

1. Найдите функцию  $w(z)$ , конформно отображающую верхнюю полуплоскость на единичный круг и такую, что  $w(a) = 0$ ,  $\arg w'(a) = \alpha$ .

2. Докажите, что линии уровня модуля и вещественной части дробно-линейной функции являются окружностями или прямыми линиями.

3. Найдите первые три члена разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  функции (а)  $\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$ , (б)  $e^{z+\cos z}$ .

4. Найдите все особые точки и определите их характер у следующих функций: (а)  $\frac{1}{1-\sin z}$ , (б)  $\frac{z}{\sin(z^3)}$ , (в)  $\frac{1}{e^{z^2}+1}$ .

5. Найдите вычеты дифференциальных форм в их особых точках:

а)  $\frac{zdz}{z^2+1}$ , б)  $\frac{e^z dz}{(z-1)^2}$ , в)  $\frac{e^{1/z} dz}{1-z}$ , г)  $\frac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)} dz$  в точке  $z = 0$ .

6. Пусть  $f$  – голоморфная функция в области  $D$ , а  $\gamma$  – замкнутая кривая в  $D$ . Докажите, что  $\oint_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$  – чисто мнимое число.

7. Вычислите интеграл  $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz$ , где  $\gamma$  – окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $a$  ( $|a| \neq R$ ).

8. Вычислите интегралы: а)  $\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + \frac{1}{2}}$ , б)  $\oint_{|z|=3} \sin \frac{z}{z+1} dz$ ,  
в)  $\oint_{|z|=4} \frac{z^3 dz}{e^{z^2} - 1}$ .

9. Пусть  $f(z)$  – голоморфная функция в верхней полуплоскости, непрерывно продолжаемая на вещественную ось, причем  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ .

Докажите интегральную формулу Шварца

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x)}{x-z} dx.$$

10. Пусть  $f(z)$  – голоморфная функция в единичном круге, непрерывно продолжаемая на его границу. Докажите интегральную формулу Пуанкаре

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{i\theta}) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + i \operatorname{Im} f(0).$$