ТФКП, семинар 2, дополнительные задачи

1. Сколько корней (с учетом кратности) имеет в единичном круге $\{z\colon |z| < 1\}$ многочлен $z^7 + 3z + 1$?

2. Сколько нулей (с учетом кратности) имеет в круге $\{z\colon |z| < 2\}$ функция $f(z) = 2z^3 + e^z + 1$?

3. Пусть функция f голоморфна и не является постоянной на связном открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$. Покажите, что если f не имеет нулей в U, то функция $z \mapsto |f(z)|$ не может иметь в U локального минимума.

4. Пусть функция f голоморфна и взаимно однозначна в некоторой проколотой окрестности точки a.

(а) Докажите, что f не может иметь в точке a существенной особенности.

(б) Если f имеет в точке a полюс, что можно сказать о его порядке?

5. Докажите, что всякий конформный автоморфизм комплексной плоскости имеет вид $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$. (*Указание.* Пусть $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — такой автоморфизм. Для начала покажите, что у f в бесконечности нет существенной особенности.)

6. Пусть f — целая функция, не являющаяся постоянной. Положим $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Докажите, что функция $r \mapsto M(r)$ является строго возрастающей. Чему может быть равен ее предел при $r \to +\infty$?

7. Точки $P_1, \ldots, P_n$ лежат вне круга с центром в точке O. Докажите, что на границе круга существует точка, для которой произведение расстояний до точек $P_1, \ldots, P_n$ больше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$, а также точка, для которой это произведение меньше, чем $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$.

8. Докажите, что не существует конформного изоморфизма между открытыми множествами $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$ и $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, 1000\}$.

9. Пусть f — непрерывная функция на единичной окружности $\{z\colon |z| = 1\}$. Докажите, что f продолжается до функции, непрерывной на замкнутом диске $\{z\colon |z| \leqslant 1\}$ и голоморфной в его внутренности, тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Фурье $\hat{f}(n)$ обращаются в нуль при всех $n < 0$.

По определению,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt = 0.$$