ТФКП, семинар 1, дополнительные задачи

1. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество. Покажите, что кольцо функций, голоморфных на U, целостно (т. е. что если $fg \equiv 0$, то $f \equiv 0$ или $g \equiv 0$).

2. Пусть $\bar{D} = \{z \colon |z| < 1\}$ — замкнутый единичный круг и $D = \operatorname{int}(D)$ — его внутренность. Предположим, что функция f непрерывна на $\bar{D}$, голоморфна на D и тождественно обращается в нуль на некоторой дуге границы. Докажите, что $f \equiv 0$.

3. Функция f непрерывна в единичном круге $\bar{D} = \{z \colon |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности D. Докажите, что эллипс, ориентированный отрицательно, образом положительно ориентированной единичной окружности при отображении f быть не может.

4. Пусть, в условиях задачи 3, образ положительно ориентированной единичной окружности — эллипс, ориентированный положительно. Что можно сказать про множество $f(D)$?

5. Пусть функция f непрерывна в замкнутом единичном круге $\{z \colon |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности.

(а) Может ли в этой ситуации образ единичной окружности быть «восьмеркой», изображенной на рис. 1 (стрелки указывают направление обхода, индуцированное обходом единичной окружности в положительном направлении)?

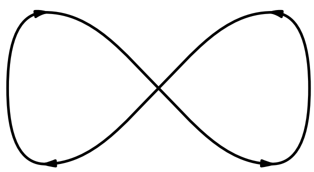

Рис. 1:

(б) Тот же вопрос, что в пункте (а), но на сей раз направление обхода (и количество обходов) «восьмерки» нам не задано: дано только, что она как множество является образом граничной окружности.

(в) Может ли в этой ситуации образ единичной окружности быть равен объединению единичной окружности и отрезка $[1; 2]$ на действительной оси?

(г) А объединению единичной окружности и отрезка $[1/2; 1]$ на действительной оси?

6. Функция f непрерывна в замкнутом единичном круге $\bar{D} = \{z\colon |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности. Положим $\partial D = \{z\colon |z| = 1\}$. Докажите, что если $f(\partial D) \subset \partial D$ и f не является константой, то $f(\partial D) = \partial D$.

7. И снова функция f непрерывна в замкнутом единичном круге $\bar{D} = \{z\colon |z| \leqslant 1\}$ и голоморфна в его внутренности D. Положим $\partial D = \{z\colon |z| = 1\}$. Докажите, что если $f(\partial D) = \partial D$, то существуют такие числа $a_1, \ldots, a_n \in D$ и $\theta \in \mathbb{R}$, что

$$f = e^{i\theta} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$$

(такие функции называются «конечными произведениями Бляшке»; n может равняться нулю — в этом случае подразумевается, что f тождественно равна $e^{i\theta}$).

Указание. Сначала докажите, что нулей у функции конечное число. Затем сведите к случаю, когда нулей нет.