Теория функций комплексного переменного
18 сентября 2020

1. Вычислите интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{(e^z-1)^2}$.

2. Вычислите интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\, dx$.

3. Вычислите интегралы (а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$, (б) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx$, (в) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^3}\, dx$.

4. Вычислите определенные интегралы (а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\, dx$, (б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\, dx$, (в) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}dx}{1+e^x}$ $\quad(0<a<1)$, (г) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\pi x}\,\frac{\sin ax}{\sinh \pi x}\, dx$, (д) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\cosh x}$, (е) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x dx}{\sinh x}$, (ж) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\pi^2)\cosh x}$.

5. Пусть Γ – гладкая кривая $\Gamma : [0,+\infty) \to \mathbb{H}$ в верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, начинающаяся в точке $\Gamma(0) \in \mathbb{R}$ вещественной оси, и пусть Γ_t – часть кривой $\Gamma_t := \Gamma([0,t])$. Через $g(z,t)$ обозначим функцию, осуществляющую конформное отображение области $\mathbb{H} \setminus \Gamma_t$ на $\mathbb{H}$, нормированную условием $g(z,t) = z + u(t)z^{-1} + O(z^{-2})$, $z \to \infty$, $t > 0$. Докажите, что существует непрерывная вещественнозначная функция $\xi(t)$, такая, что функция $g(z,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{g(z,t)-\xi(t)}\,\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad g(z,0) = z.$$

Это уравнение называется (хордовым) уравнением Левнера и играет важную роль в теории конформных отображений.