Листок 1

Скобки Пуассона. Основные понятия квантовой механики.

Задача 1. Действие операторов

$$\mathbb{P}_x(u) = \exp\left(u\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \mathbb{P}_y(u = \exp\left(u\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\mathbb{J}(u) = \exp\left(u\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right), \tag{2}$$

$$\mathbb{D}(u) = \exp\left(u\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) \tag{3}$$

на пространстве гладких функций $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, задаёт однопараметрические группы. преобразований трансляции (1), вращения (2), дилатации (растяжения) (3) аргументов (x,y).

а) Убедитесь, что это так.

б) Вычислите коммутаторы (скобки Ли) инфинитезимальных преобразований δ_x, δ_y, δ_J, δ_D, отвечающих (1), (2), (3).

в) В предположении, что (1), (2), (3) являются симметриями действия механической системы, получите выражения для соответствующих нётеровских интегралов движения P_x, P_y, J, D как функций от координат x, y и импульсов p_x, p_y.

Вычислите скобки Пуассона нётеровских интегралов и сравните результат с коммутаторами пункта б).

2) Проверьте соотношения:

$$\delta_X x_i = \{x_i, X\}, \qquad (4а)$$

$$\delta_X p_i = \{p_i, X\}. \qquad (4б)$$

Здесь введены компактные обозначения

$$x_1 := x, \quad x_2 := y, \quad p_1 := p_x, \quad p_2 := p_y,$$

X – один из нётеровских интегралов P_x, P_y, J, D,

δ_X – одно из инфинитезимальных преобразований $\delta_x, \delta_y, \delta_J, \delta_D$.

При проверке соотношений (4б) считайте, что δ_X является симметрией системы:

$$\delta_X L(x_i, \dot{x}_i) = 0.$$

Задача 2.

Механическая система задана на фазовом пространстве с каноническими координатами

$$\vec{x} = \{x_i\}_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{p} = \{p_i\}_{i=1,2,3} \in \mathbb{R}^3.$$

Известно, что величины

$$B_i = \frac{|\vec{x}|+1}{|\vec{x}|} x_i + (\vec{x}, \vec{p})\, p_i \quad , \quad i=1,2,3$$

являются интегралами движения.

Докажите, что компоненты вектора момента импульса

$$M_i = \varepsilon_{ijk}\, x_j\, p_k$$

в этой системе тоже сохраняются.

Задача 3

Квантовая частица, закреплённая в точке пространства (например, атом в кристалле), имеет внутренние степени свободы, описываемые нормированным вектором 2-мерного пространства

$$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 , \quad |\varphi|^2 := \sum_i |\varphi_i|^2 = 1 .$$

Векторы канонического базиса в пространстве состояний такой частицы принято обозначать

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \uparrow , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: \downarrow .$$

У этой частицы можно измерять значения компонент её вектора спина $\vec{S} = \{S_i\}_{i=1,2,3}$ задаваемые в каноническом базисе с помощью матриц Паули

$$\hat{S}_i = \frac{1}{2}\sigma_i^{*)} , \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

*) Для простоты мы используем специальные единицы измерения спина. Обычно

$$\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

Система двух взаимодействующих квантовых частиц со спинами имеет пространство состояний

$$|\varphi^{(1)}\rangle \otimes |\varphi^{(2)}\rangle \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 .$$

Оператор Гамильтона системы имеет вид:

$$\hat{H}_\beta = \hat{\vec{S}}^{(1)} \hat{\vec{S}}^{(2)} + \frac{\beta}{2} \hat{S}_3^{(1)} + \frac{1}{2\beta} \hat{S}_3^{(2)},$$

где $\hat{\vec{S}}^{(1)}$ и $\hat{\vec{S}}^{(2)}$ – операторы спина первой и второй частиц.

Первое слагаемое в $\hat{H}_\beta$ описывает взаимодействие спинов частиц; второе и третье слагаемые – действие внешнего магнитного поля $\vec{B}$ на частицы типа $\vec{B}\hat{\vec{S}}^{(i)}$. Поле $\vec{B}$ направлено вдоль 3-ей оси и неоднородно (поэтому коэффициенты при $\hat{S}_3^{(1)}$ и $\hat{S}_3^{(2)}$ разные). $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ – параметр, характеризующий магнитное поле.

a) Определите возможные значения энергии системы 2-х частиц и отвечающие им состояния системы.

б) Приведите полный набор взаимно коммутирующих операторов наблюдаемых величин, для которых канонический базис

$$\{\uparrow\uparrow, \uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\downarrow\}$$

является базисом собственных векторов.

в) Какие из наблюдаемых

$$\hat{\vec{S}}^2 = \left(\hat{\vec{S}}^{(1)} + \hat{\vec{S}}^{(2)}\right)^2; \quad \hat{S}_3 = \hat{S}_3^{(1)} + \hat{S}_3^{(2)};$$

$$\left(\hat{\vec{S}}^{(1)}\right)^2 \quad ; \quad \hat{S}_3^{(1)}$$

сохраняются при эволюции системы всегда? Какие из них сохраняются лишь при определенных значениях параметра β?

г) В момент времени $t_0 = 0$ система находилась в состоянии

$$\psi_0 = \underbrace{\downarrow\uparrow \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\text{разные общепринятые обозначения этого состояния}}$$

Какова вероятность в момент времени t наблюдать систему в состоянии $\uparrow\downarrow$? $\downarrow\uparrow$? $\uparrow\uparrow$?

д) Для наблюдаемой $\hat{\vec{S}}^2$ определите её максимальное и минимальное возможные значения и состояния, в которых эти значения достигаются.

В условиях пункта г) рассчитайте среднее значение $\langle \hat{\vec{S}}^2 \rangle$ и ее дисперсию $\Delta^2(\hat{\vec{S}}^2)$ в момент времени t.

Задача 4

Одинокая квантовая частица со спином (см. условие задачи 3) находится в состоянии $|\varphi\rangle \in \mathbb{C}^2$, про которое известно, что вероятность получить при измерении $\hat{S}_1$ значение $\frac{1}{2}$ равно

$$\rho_{s_1=\frac{1}{2}} = \sin^2\omega ,$$

где $\omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$ — параметр задачи.

а) Найдите общий вид состояния $|\varphi\rangle$, отвечающего условию задачи. Однозначно ли оно определяется?

б) Для каждого из полученных в а) состояний рассчитайте вероятность $\rho_{s_2=1/2}$ получения при измерении $\hat{S}_2$ значения $1/2$.

При каких условиях возможно, чтобы

$$\rho_{s_1=1/2} = \rho_{s_2=1/2} ?$$

Однозначно ли фиксируется состояние $|\varphi\rangle$ заданием $\rho_{s_1=1/2}$ и $\rho_{s_2=1/2}$?