Теория ожидаемой полезности

Мария Волкова

mvvolkova_11@edu.hse.ru

28.09.2020

Теория Неймона-Моргенштерна

Бинарное отношение $\preceq$ на множестве X назовем *предпочтением*, если оно является слабым порядком (полное и транзитивное).

Построим по функции полезности $u : X \to \mathbb{R}$ предпочтение $\preceq$:

$$U(x) \leq U(y) \Leftrightarrow x \preceq y$$

Рассмотрим лотереи на множестве X. Пусть имеется функция полезности $u : X \to \mathbb{R}$. *Ожидаемой полезностью* лотереи $\pi \in \Delta(X)$ назовем математическое ожидание u:

$$U(\pi) = \sum_{x \in X} u(x)\pi(x)$$

Теорема об ожидаемой полезности

Теорема (Нейман-Моргенштерн). Пусть X - конечное множество, и предпочтение $\preceq$ на $\Delta(X)$ удовлетворяет аксиомам:

1. $\preceq$ – слабый порядок;
2. (аксиома замещения или независимости) Если для лотерей p, q выполнено $p \preceq q$, то для любой лотереи r и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется $\alpha p + (1 - \alpha)r \preceq \alpha q + (1 - \alpha)r$;
3. отношение $\preceq$ замкнуто.

Тогда существует функция u на X, такая что предпочтение $\preceq$ задается ожидаемой полезностью $U(q) = \sum_x q(x)u(x)$. При этом функия u определена с точностью до положительного аффинного преобразования.

Теорема об ожидаемой полезности

Доказательство.

- Пусть максимальный элемент X – это x^*.Тогда он максимален и во всем $\Delta(X)$.

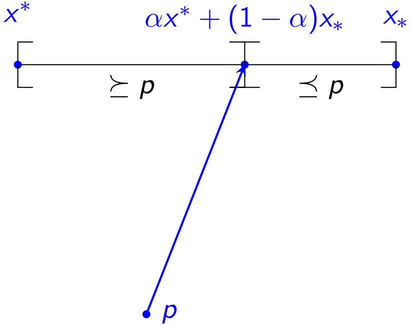
  Если $p \succeq q, p \succeq r$, то для любого $\alpha \in [0,1]$ выполнено:

  $$p \succeq \alpha q + (1-\alpha) r$$

- Аналогично минимальный x_* в X будет минимальным элементом в $\Delta(X)$.
- Если $x_* = x^*$, то все лотереи эквивалентны. Возьмем $u \equiv const$.

Теорема об ожидаемой полезности

- Если $x_* \preceq x^*$. Построим функию U, положим $U(x^*) = 1, U(x_*) = 0$.

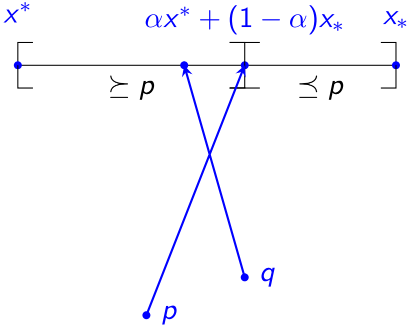


$U(p) := \alpha$

$p = U(p)x^* + (1 - U(p))x_*$

Теорема об ожидаемой полезности

- Функция U представляет предпочтение $\preceq$:



Теорема об ожидаемой полезности

- Функция U коммутирует с образованием вероятностных смесей, т.е.

$$U(\alpha p + (1-\alpha)q) = \alpha U(p) + (1-\alpha)U(q)$$

Проверим:

$$p = U(p)x^* + (1 - U(p))x_* \text{ и } q = U(q)x^* + (1 - U(q))x_*$$

$$\alpha p + (1-\alpha)q =$$

$$= \alpha(U(p)x^* + (1 - U(p))x_*) + (1-\alpha)(U(q)x^* + (1 - U(q))x_*) =$$

$$= (\alpha U(p) + (1-\alpha)U(q))x^* + (\alpha(1 - U(p)) + (1-\alpha)(1 - U(q)))x_* =$$

$$= (\alpha U(p) + (1-\alpha)U(q))x^* + (1 - (\alpha U(p) + (1-\alpha)U(q)))x_*$$

Теорема об ожидаемой полезности

- Если лотерея p равна $\sum_x p(x) \otimes x$, то $U(p) = \sum_x p(x) U(x)$. Значит функция U является ожидаемой полезностью.

Пример

Санкт-Петербургский парадокс.

Пусть есть лотерея:

приз	2	4	8	...	2^n	...
выигрыш	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

Математическое ожидание этой лотереи равно

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + \ldots + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots = \infty$$

Если полезность денег не линейна, а, например, $u(x) = \sqrt{x}$, то ожидаемая полезность такой лотереи:

$$U = \sqrt{2}\frac{1}{2} + \sqrt{4}\frac{1}{4} + \sqrt{8}\frac{1}{8} + \ldots \approx 2,44$$

Теория Сэвиджа

X – множество чистых исходов; $\Delta(X)$ – множество лотерей; Ω – конечное множество состояний природы. $L = \{f : \Omega \to \Delta(X)\}$ –