

Семинар 5

1. С помощью теоремы (леммы) Шура докажите, что всякое неприводимое комплексное представление абелевой группы одномерно.

2. Пусть $G : V$ – комплексное представление конечной группы G . Тогда, как известно, в пространстве V существует G -инвариантное эрмитово скалярное умножение. Если рассматриваемое представление неприводимо, то любые два инвариантных скалярных умножения отличаются на положительный множитель. Доказать (С: применить лемму Шура).

3. Зададим вещественное двумерное представление циклической группы \mathbb{Z}_n , сопоставив элементу 1 поворот плоскости на угол $2\pi/n$. Опишите алгебру сплетающих операторов для этого представления.

Задачи 4, 5, 6 принадлежат А.А.Кириллову.

4. Рассмотрим пространство комплекснозначных функций на гранях куба. В этом пространстве действует оператор S , который заменяет значение функции на грани средним арифметическим ее значений на смежных гранях. Доказать, что:

а) этот оператор линеен;

б) он является сплетающим для представления группы вращений куба S_4 в пространстве функций на его гранях.

Написать матрицу этого оператора в стандартном базисе, состоящем из дельта-функций. Можете ли Вы найти собственные значения этого оператора?

5. Разложите представление группы S_4 из задачи 4 на неприводимые. С помощью леммы Шура найдите спектр сплетающего оператора (С: поищите кандидатов среди четных или нечетных функций).

6. На гранях куба написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Что мы увидим на гранях после действия оператора S^{2020} ?