

Математическая теория игр:

Домашнее задание №4

1. Маленький Волшебник учится создавать погоду. Сначала ему нужно создать Добрую или Злую тучу. После этого ему нужно создать от одной до трех молний. Из Доброй тучи может посыпаться одна или две молнии, а из Злой — от одной до трех. После этого Маленькому Волшебнику нужно создать гром. Число ударов грома может быть от одного до трех, но оно не может быть равно числу созданных молний (например, одну молнию будут сопровождать два или три удара грома). Для создания как молний, так и грома Маленький волшебник выбирает число из допустимого подмножества множества $\{1, 2, 3\}$ и хлопает в ладоши выбранное количество раз. Постройте дерево игры для игры в развернутой форме, моделирующей возможные ходы Маленького Волшебника. Отметьте информационные множества. Для смешанной стратегии $1/3 \otimes$ (Добрая туча, 1, 3) $+ 1/3 \otimes$ (Добрая туча, 2, 1) $+ 1/3 \otimes$ (Злая туча, 3, 2) из смешанного расширения постройте ассоциированную с ней поведенческую стратегию. Укажите исходы, вероятности которых поменялись. Однозначно ли можно определить множество таких исходов?
2. Один человек, отпраздновав свой день рождения, захотел прогуляться по прямой линии. Он встал в точку ноль и решил, что каждый шаг будет делать либо влево, либо вправо. Однако слева от него на расстоянии одного шага находится яма, а справа на расстоянии четырех шагов — полицейский участок. Если человек попадает в любое из двух указанных мест, то он проигрывает. Если проигрыш не наступает, то игра заканчивается через сто шагов, и тогда человек считается победителем. Какую стратегию, смешанную или поведенческую, нужно выбрать человеку в соответствующем расширении игры, чтобы гарантированно выиграть, и как при этом нужно играть?
3. Приведите пример игры в развернутой форме, в которой существуют информационные множества, состоящие из более чем одного элемента, и при этом её поведенческое расширение даёт те же исходы, что и смешанное расширение ассоциированной с ней игры в нормальной форме.
4. Докажите, что в поведенческом расширении любой игры сумма вероятностей, приписываемая вершинам в соответствии с определением, данным в 4-ой лекции, на множестве терминальных вершин равна единице.



Рис. 1: Игра про списывание

5. Игра про списывание на экзамене задана развёрнутой формой на рисунке. Студент предполагает, что преподаватель с вероятностью p халявный, то есть не прогонит из-за списывания и подскажет, а с вероятностью $(1-p)$ жёсткий, и тогда точно прогонит списывающего и не будет подсказывать. Исходя из этих субъективных вероятностей, как надо действовать студенту?
6. В одной семье состоялся следующий диалог: Сын: «Давайте снова голосованием решим, чем займёмся сегодня вечером? Мы знаем предпочтения друг друга, таким образом, это будет некооперативная честная игра» Дочь: «Мне кажется, ты неправ, и такая игра не будет некооперативной, ведь некоторые предпосылки выполняться не будут. Например, ...» Продолжите высказывания дочки, придумав, какие предпосылки могут не выполняться, если в семье ещё есть мама, папа и бабушка.
7. В крепости живет группа людей с карими и голубыми глазами. Их кодекс особым образом относится к цвету глаз человека - человек не должен оставаться, если знает цвет своих глаз. Поэтому они никогда не говорят об этом, не смотрятся в зеркало и так далее. И если кто-нибудь всё же узнает цвет своих глаз, он должен покинуть крепость в ближайшую полночь. Все они абсолютно логичны и догадливы и знают об этом. То есть, если можно сделать логический вывод из информации, они его делают. Каждый видит цвет глаз всех остальных и не знает только своего цвета глаз. Однажды в крепость прибыл путешественник Джон. Уезжая, он сказал, что ему было чудно видеть здесь голубоглазых и кареглазых. Ему объяснили, что говорить такого нельзя, и он в расстроенных чувствах отбыл. Что произойдет в крепости после его отъезда?
8. Доказать, что $\deg([I, i + 1])$ не зависит от i (подсказка: П1: Lemma 2.1).
9. Доказать обобщение леммы Шпернера для $n = 3$ (П1: Corollary 3.1).
10. Доказать лемму о гальках (pebbles) для n -угольника (см. доказательство П1: Corollary 3.3 и ссылки [4], [5]).

11. Привести доказательство обобщенной леммы Шпернера для n -угольника (П1: Corollary 3.3).
12. Вывести из обобщенной леммы Шпернера для n -угольника обобщение леммы Таккера.

Подсказки:

П1. O.R. Musin. Around Sperner's lemma, preprint, arXiv:1405.7513