Прикладные методы анализа 2020
Занятие 06.10.2020

1. Приложения преобразования Лапласа

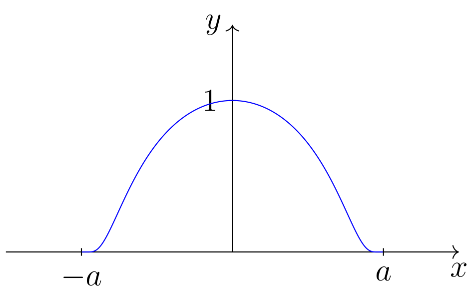
Свертка функций. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, тогда свертка определена по формуле:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt.$$

Свойства:
а) коммутативность,
б) $\sup(f * g) = \sup f + \sup g$,
в) $\dfrac{d}{dx}(f * g) = \dfrac{df}{dx} * g = f * \dfrac{dg}{dx}$.

В частности, если f бесконечно дифференцируема, то и $f * g$ бесконечно дифференцируема для любой $g \in L^1(\mathbb{R})$. Это позволяет применять свертку для сглаживания функций, воспользовавшись широко известной бесконечно гладкой функцией-"колоколом" с компактным носителем

(1) $$\phi(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{a^2}{x^2 - a^2}, & \text{если } x^2 < a^2, \\ 0, & \text{если } x^2 \geq a^2, \end{cases}.$$



Преобразование Лапласа от свертки. Отметим, что свертка функций, сосредоточенных на положительной полуоси, сводится к интегралу по конечному промежутку, $(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$, в частности, свертка любых оригиналов хорошо определена.

Пусть $f(t)$, $g(t)$ - оригиналы с показателями роста a и b. Тогда: свертка $(f * g)(t)$ – тоже оригинал с показателем роста $c = \max(a, b)$ (точнее, $\max(a, b) + \varepsilon$, где ε – произвольное положительное число) и ее преобразование Лапласа равно произведению изображений f и g,

$$f(t) \risingdotseq F(p), \qquad g(t) \risingdotseq G(p) \qquad \Longrightarrow \qquad (f * g)(t) \risingdotseq F(p)G(p).$$

В самом деле,

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau < M \int_0^t e^{c\tau}e^{c(t-\tau)}d\tau = Mte^{ct} < M_1 e^{(c+\varepsilon)t},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt}g(t-\tau)d\tau =$$
$$= \int_0^{\infty} f(\tau)d\tau \int_0^{\infty} g(s)e^{-ps}ds = F(p)G(p).$$

Перестановка порядка интегрирования допустима в силу абсолютной сходимости при $\operatorname{Re} p > c + \varepsilon$.

Имеет место и обратное утверждение: произведение оригиналов – оригинал с показателем роста $a + b$ и

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(q)G(p-q)dq, \qquad c > a, \qquad \operatorname{Re} p > a + b$$

Действительно, подставляя в преобразование Лапласа формулу обращения для $f(t)$, получаем:

$$f(t)g(t) \doteqdot \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \left\{\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)\right\} g(t)e^{-pt}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dqF(q)\int_0^\infty dt g(t)e^{-(p-q)t}.$$

Обоснование возможности перестановки пределов интегрирования несколько более тонкое (см. Лаврентьев, Шабат).

Формула Дюамеля и решение задачи Коши. Из того, что $f(t) * g(t) \doteqdot F(p)G(p)$ и $f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0)$ следует $f'(t) * g(t) \doteqdot (pF(p) - f(0))G(p)$, что можно переписать как

$$f'(t) * g(t) + f(0)g(t) \doteqdot pF(p)G(p) \qquad \text{(формула Дюамеля)}.$$

Если же $f(0) = 0$, то

$$f'(t) * g(t) \doteqdot pF(p)G(p)$$

Рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными условиями для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = f(t), \qquad x(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0,$$

где $L(u)$ – многочлен степени n с постоянными коэффициентами. Преобразование Лапласа дает соотношение

$$L(p)X(p) = F(p), \qquad \text{где} \qquad f(t) \doteqdot F(p)$$

так что

$$X(p) = \frac{F(p)}{L(p)}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x_0(t) = f(t), \qquad x_0(0) = \ldots = x_0^{(n-1)}(0) = 0,$$

так что

$$L(p)X_0(p) = \frac{1}{p}, \qquad \text{так что} \qquad X_0(p) = \frac{1}{pL(p)}$$

и

$$X(p) = pX_0(p)F(p)$$

и по формуле Дюамеля получаем, что

$$x(t) = x_0'(t) * f(t) = \int_0^t x_0'(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Таким образом, $x_0'(t-\tau)$ представляет функцию Грина задачи Коши с нулевыми начальными условиями.

Расчет электрических цепей. В электрической цепи, состоящей из сопротивлений R_i, катушек индуктивности L_i и конденсаторов емкостей C_i, падение напряжения $u(t)$ на элементарном участке цепи связано с током $i(t)$ на нем по формулам

$$u(t) = Ri(t), \qquad U(t) = L\frac{di}{dt}, \qquad u(t) = \frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt + q_0\right), \qquad q_0 - \text{ начальный заряд.}$$

Далее законы Кирхгофа, говорящие, что сумма токов в любой точке цепи, также как и падение напряжения на любом замкнутом контуре, равны нулю, позволяют выписать систему интегро-дифференциальных уравнений с начальными условиями.

Рассмотрим для простоты расчетов задачи включения, в которых начальные ток и напряжения отсутствуют. Тогда преобразование Лапласа от предыдущих формул дает:

$$U(p) = RI(p), \qquad U(p) = pLI(p), \qquad U(p) = \frac{I(p)}{p}.$$

В силу линейности преобразования Лапласа законы Кирхгофа остаются верными и для изображений токов и напряжений $I(p)$ и $U(p)$. Поэтому, если ввести сопротивление для изображений $Z(p)$ из соотношения

$$U(p) = Z(p)I(p),$$

то оно может рассчитываться по обычным правилам для последовательно и параллельно включенных сопротивлений.

Пример. В цепь с двумя сопротивлениями и катушкой индуктивности, подключенной параллельно второму сопротивлению, подают ЭДС $u(t) = \sin t$. Требуется найти зависимость тока от времени.

Сопротивление для изображений $Z(p)$ вычисляется по формуле

$$Z(p) = R_1 + \frac{pLR_1}{pL + R_1},$$

а изображение тока

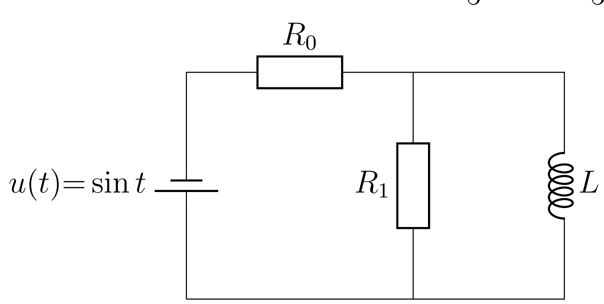
$$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{pZ(p)}.$$

Полагая для простоты расчетов $R_0 = R_1 = L = 1$, получаем

$$I(p) = \frac{p+1}{(2p+1)(p^2+1)} = -\frac{1}{5}\frac{p}{p^2+1} + \frac{3}{5}\frac{1}{p^2+1} + \frac{2}{5(2p+1)}$$

так что

$$i(t) = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{3}{5}\sin t + \frac{1}{5}e^{-t/2}.$$



2. Обобщенные функции

Определения. Рассмотрим множество всех (комплекснозначных) бесконечно дифференцируемых функций $\phi(x)$, $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n$ от n вещественных переменных. Мы говорим, что функция из этого множества принадлежит пространству

1) $\mathcal{D}$ основных функций (пространству финитных функций), если она финитна, т. е., обращается в ноль вне некоторой конечной области в $\mathbb{R}^n$.

2) $\mathcal{S}$ основных функций (пространству быстро убывающих функций), если при $|x| \to \infty$ она стремится к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой конечной степени $|x|$, т. е. при всех x выполнены неравенства

$$|x^k \phi^{(q)}(x)| \le C_{k,q}, \quad k, q = 0, 1, \dots$$

Понятно, что оба введенные выше пространства линейны. Зададим на них топологию, сказав, какие последовательности сходятся к нулю.

Мы говорим, что последовательность основных функций $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots,$ $\phi_n(x), \dots$

a) сходится к нулю в пространстве $\mathcal{D}$, если все функции последовательности обращаются в ноль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю, как и их производные любого порядка,

b) сходится к функции $\phi(x)$ в пространстве $\mathcal{S}$, если в любой ограниченной области производная любого порядка от $\phi_n(x)$ равномерно сходится к соответствующей производной функции $\phi(x)$ и в оценках

$$|x^k \phi_n^{(q)}(x)| \le C_{k,q}, \quad k, q = 0, 1, \dots,$$

постоянные $C_{k,q}$ можно выбрать независящими от n.

Понятно, что $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, причем плотно в нем (доказательство: умножить функцию из $\mathcal{S}$ на функцию-"колокол"(1) и перейти к пределу $a \to \infty$).

Обобщенной функцией, заданной на соответствующем пространстве основных функций, называется линейный непрерывный функционал на этом пространстве. Иными словами, каждой основной функции $\phi(x)$ сопоставляется число, обозначаемое (f, ϕ), причем выполнены следующие условия:

1) для любых двух чисел a_1 и a_2 и любых двух основных функций $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ имеет место равенство $(f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2) = a_1(f, \phi_1) + a_2(f, \phi_2)$ (линейность);

2) если последовательность основных функций $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x), \dots$ стремится к нулю, то последовательность чисел (f, ϕ_1), (f, ϕ_2), $\dots$, (f, ϕ_n), $\dots$ сходится к нулю (непрерывность).

Пусть задана некоторая функция $f(x)$, абсолютно интегрируемая в каждой конечной области пространства $\mathbb{R}^n$ (называется локально интегрируемой функцией). Зададим функционал

$$(f, \phi) = \int dx\, f(x)\phi(x). \tag{2}$$

Это линейный непрерывный функционал на обоих пространствах. Таким образом, обобщенные функции $\mathcal{D}'$ включают в себя все локально интегрируемые функции. В случае $\mathcal{S}'$ на локально интегрируемые функции следует дополнительно наложить условие полиномиального роста на бесконечности для сходимости интеграла (2). Поэтому пространство $\mathcal{S}'$ носит название пространства распределений (обобщенных функций) умеренного роста.

Локальные свойства обобщенных функций. Очевидно, что интеграл $\int dx \frac{\phi(x)}{x}$ расходится, если функция $\phi(x)$ не обращается в ноль в нуле. Регуляризовать такой интеграл, т. е. функцию $1/x$, возможно следующим образом:

$$\int dx \phi(x) \mathrm{reg.} \frac{1}{x} = \int_{-\infty}^{-a} dx \frac{\phi(x)}{x} + \int_{-a}^{b} dx \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} + \int_{b}^{\infty} dx \frac{\phi(x)}{x},$$

для некоторых положительных a и b и где $\phi(x)$ – основная функция (из $\mathcal{S}$ или $\mathcal{D}$). Обозначим через p.v. специальную регуляризацию в смысле главного значения":

(3) $$\left(\frac{1}{x}, \phi\right) \equiv \mathrm{p.v.} \int dx \frac{\phi(x)}{x} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x| > \epsilon} dx \frac{\phi(x)}{x}.$$

Как легко видеть:

$$\left(\frac{1}{x}, \phi\right) = \int_{0}^{\infty} dx \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x}$$

и по предыдущему

$$\int dx \phi(x) \mathrm{reg.} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}, \phi\right) + \ln \frac{a}{b} \phi(0),$$

так что произвольная регуляризация функции $1/x$ дается с точностью до произвольной константы в виде

$$\mathrm{reg.} \frac{1}{x} = \mathrm{p.v.} \frac{1}{x} + C\delta(x),$$

где δ-функция Дирака определена как функционал на основной функции $\phi(x)$ равенством

(4) $$(\delta, \phi) = \phi(0).$$

Дифференцирование обобщенных функций. Одним из достоинств обобщенных функций, определяющим их приложимость к исследованию дифференциальных уравнений, является их бесконечная дифференцируемость в смысле следующего определения.

Для заданной обобщенной функции f ее производная по x определяется как:

(5) $$(f', \phi) = -(f, \phi').$$

Легко видеть, что данное определение дает обобщенную функцию в каждом из рассматриваемых пространств.

Пример-упражнение. Показать, что в смысле главных значений:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

где обобщенная функция $\frac{1}{x^2}$ в смысле главного занчения определяется как

$$\left(\frac{1}{x^2}, \phi\right) = \mathrm{p.v.} \int dx \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} \equiv \int_{0}^{\infty} dx \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2}$$