Прикладные методы анализа 2020
Занятие 29.09.2020
От подстановки Лапласа к преобразованию Лапласа

1. Еще один пример на подстановку Лапласа – уравнение Эйри.

$$\ddot{x} = tx$$

Подстановка Лапласа

$$x(t) = \int_C X(p)e^{pt}dp, \qquad \ddot{x}(t) = \int_C p^2 X(p)e^{pt}dp,$$

$$tx(t) = \int_C X(p)d(e^{pt}) = X(p)e^{pt}\big|_A^B - \int_C X'(p)e^{pt}dp$$

работает, если
а) выполнено соотношение

$$X'(p) = -p^2 X(p), \tag{1}$$

б) присутствующие в рассмотрении интегралы сходятся
в) граничные условия зануляются: $X(p)e^{pt}|_A^B = 0$.

Соотношение (1) – это дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dX}{dp} = -p^2 X$$

Его решение

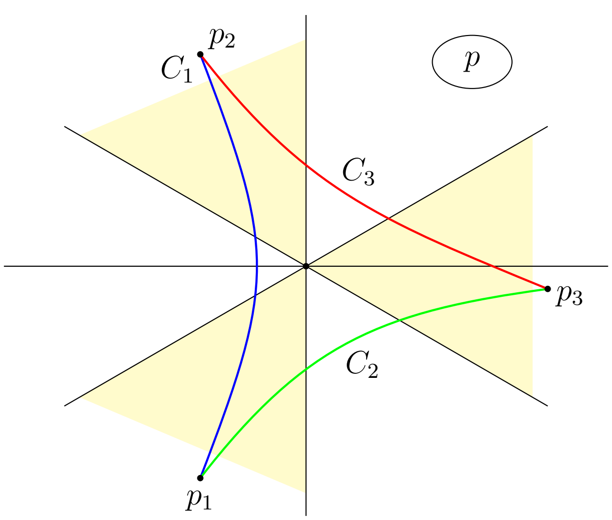
$$X = Ce^{-p^3/3}, \qquad x(t) = \int_C e^{-p^3/3+pt}dp.$$

Для сходимости интеграла на бесконечности достаточно, чтобы действительная часть $-p^3$ оставалась отрицательной при стремлении к бесконечности, т. е.,

$$\pi/2 < 3\arg p + \pi < 3\pi/2.$$

Таким образом, концы контура должны лежать в одном из трех секторов (см. рис., указанные сектора закрашены желтым цветом)

$$-\frac{\pi}{6} < \arg p < \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{2} < \arg p < \frac{5\pi}{6}, \qquad \frac{7\pi}{6} < \arg p < \frac{3\pi}{2}$$



$$x(t) = \int_C \mathrm{e}^{pt - p^3/3}dp$$

$$X(p)\mathrm{e}^{pt}\Big|_A^B = 0$$

$$\{A, B\} \in \{p_1, p_2, p_3\}$$

$$\{C\} \in \{C_1, C_2, C_3\}$$

При этих же условиях граничные члены зануляются. Этим условиям удовлетворяют три естественных контура C_1, C_2 и C_3, интегралы по которым дают в силу линейной зависимости контуров два линейно независимых решения уравнения Эйри.

2. Применим подстановку Лапласа к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, например, для задачи Коши

$$\dot{x} - x = 1, \qquad x(0) = 0.$$

Решение однородного $\dot{x} = x$– это $x(t) = Ce^t$. Подстановка в неоднородное с "ожившей"константой приводит к уравнению $\dot{c}e^t = 1$, откуда с учетом начальных условий получаем

$$x(t) = \begin{cases} e^t - 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Хотим, чтобы подстановка Лапласа $x(t) = \int_C X(p)e^{pt}dp$ привела к соотношению

$$\int_C (p-1)X(p)e^{pt}dp = \int_C \Phi(p)e^{pt}dp,$$

что гарантировано, если

$$\int_C \Phi(p)e^{pt}dp = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Тогда

$$X(p) = \frac{\Phi(p)}{p-1} \qquad x(t) = \int_C \frac{\Phi(p)e^{pt}}{p-1}dp = \begin{cases} e^t - 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Соотношения (2) и (3) говорят о том, что неизвестная пока функция $\Phi(p)$ должна иметь простой полюс в нуле, а контур должен быть вертикальной линией справа от полюсов подынтегрального выражения – тогла лемма Жордана принудит замыкать контур дугами в разные полуплоскости в зависимости от знака t. Все получится, если

$$\Phi(p) = \frac{1}{2\pi i p}, \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(p-1)}dp,$$

где c – произвольное вещественное число большее единицы.

Видим, что имеем дело с интегральным преобразованием

$$X(p) \mapsto x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} X(p)e^{pt}dp, \tag{4}$$

где контур интегрирования – вертикальная прямая справа от особенностей $X(p)$. В частности, отсюда будет следовать, что $x(t) = 0$ при $t < 0$. Возникает естественный вопрос: как вычислить $X(p)$, зная $x(t)$? Поскольку $x(t) = 0$ при $t < 0$, то

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)\rho(t)dt$$

для некоторой общей для всех весовой функции $\rho(t)$. Имеющиеся примеры

$$\int_0^\infty \rho(t)dt = \frac{1}{p}, \qquad \int_0^\infty e^t\rho(t)dt = \frac{1}{p-1}$$

подсказывают: $\rho(t) = e^{-pt}$. Преобразование

$$x(t) \mapsto X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt \tag{5}$$

называется преобразованием Лапласа, а формула (4) – формулой обращения преобразования Лапласа.

3. Преобразование Лапласа. Интегральное преобразование Лапласа (5) в доступной и полной форме изложено, например, в учебнике лаврентьева и Шабата "Методы теории функций комплексного переменного гл.VI. Введено в научный обиход оно было замечательным ученым и инженером-самоучкой Оливером Хэвисайдом сто лет спустя после Лапласа, а полное математическое обоснование относится уже к началу XX века.

Терминология: *Оригиналом* называется любая комплексная функция $f(t)$ вещественного аргумента t, удовлетворяющая условиям:

a) $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера всюду, кроме отдельных изолированных точек, где она имеет разрывы 1 рода (причем на каждом конечном интервале таких точек – конечное число), т. е., для каждого t, кроме указанных изолированных точек, найдутся такие положительные константы A, $a \leq 1$ и h_0, что выполнено
$$|f(t+h) - f(t)| < A|h|^a$$
для всех h, $|h| < h_0$, где A, вообще говоря, может зависеть от t;

b) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

c) $f(t)$ растет не быстрее некоторой экспоненты, т. е., $|f(t)| < Me^{s_0 t}$ для некоторого $M > 0$ и вещественного s_0, называемого показателем роста $f(t)$ (точнее, inf).

Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1 и 3, то $f(t) = \eta(t)\varphi(t)$ удовлетворяет всем трем условиям. Здесь

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

– функция Хэвисайда. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция комплексного переменного p (изображение)

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{6}$$

Функция Хэвисайда – простейший пример оригинала (часто называется единичной функцией). Вообще ее часто опускают, всегда в этом методе подразумевая выполнение условия 2.

Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называют функцию комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемую соотношением (6). Фраза "функция $f(t)$ имеет своим изображением $F(p)$" записывается как $f(t) \doteqdot F(p)$ или $F(p) \doteqdot f(t)$.

Утверждение. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической функцией p.

Доказательство следует из оценки по свойству 3:

$$\left|\int\limits_0^\infty dt\, f(t)e^{-pt}\right| \le M\int\limits_0^\infty dt\, e^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{s-s_0},$$

так что в указанной области интеграл абсолютно сходится. Кроме того в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge s_1 > s_0$

$$\left|\int\limits_0^\infty dt\, tf(t)e^{-pt}\right| \le M\int\limits_0^\infty dt\, te^{-(s-s_0)t} = \frac{M}{(s_1-s_0)^2}.$$

Поэтому в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ интеграл, получающийся дифференцированием по p, сходится равномерно, ибо он также мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от p. Итак, функция $F(p)$ в любой точке полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ обладает производной. Часто мы будем рассматривать аналитическое продолжение изображений за прямую $\operatorname{Re} p > s_0$. Если точка p стремится к бесконечности так, что $\operatorname{Re} p$ неограниченно возрастает, то $F(p)$ стремится к нулю в силу первой оценки.

Свойства преобразования Лапласа.

I Простейшие преобразования (множитель $\eta(t)$ в левой части для краткости опускается, т. е., левая часть считается равной нулю при $t < 0$):

$$1 \doteqdot \frac{1}{p}; \qquad e^{p_0 t} \doteqdot \frac{1}{p-p_0}, \qquad \sin at \doteqdot \frac{a}{p^2+a^2}, \qquad \cos at \doteqdot \frac{p}{p^2+a^2} \tag{7}$$

Далее обозначаем: $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$ и т. д.

II Линейность: $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p)$.

III Подобие: для любого постоянного$\alpha > 0$ имеем $f(\alpha t) \doteqdot \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

IV Если функция $f(t)$ напрерывна при $t > 0$ и $f'(t)$ (или $f^{(n)(t)}$) является оригиналом, то

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0),$$
$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t\to+0} f^{(k)}(t)$.

V Дифференциирование изображения: $F^{(n)}(p) \doteqdot (-t)^n f(t)$.

VI Теорема запаздывания. Для любого $\tau > 0$: $f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p)$.

VII Теорема смещения. Для любого комплексного p_0: $e^{p_0 t} f(t) \doteqdot F(p-p_0)$.

Пользуясь этими свойствами, нетрудно понять, что любая рациональная функция $\frac{P(p)}{Q(p)}$, где $\deg P(p) < Q(p)$, является изображением некоторого оригинала, который можно предъявить явно, разложив эту рациональную функцию в сумму простейших дробей.

Теорема обращения преобразования Лапласа.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, и $F(p)$ служит ее изображением, то в любой точке t, где $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера, справедливо равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} dp\, e^{pt} F(p), \tag{8}$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = a > s_0$ и понимается в смысле главного значения на бесконечности.

Доказательство: см. Лаврентьев, Шабат. Отметим, что работа с формулой обращения постоянно аппелирует к лемме Жордана из курса ТФКП:

Лемма Жордана. Пусть $f(z)$ – регулярная аналитическая функция комплексного переменного z в области $G = \{z : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0\}$, C_R – полуокружность $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\max_{z \in C_R} |f(z)| \to 0$ при $R \to \infty$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0$$

4. Применение преобразования Лапласа для решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример:

$$\dot{x} - 2x = e^{2t}, \qquad x(0) = 1$$

Преобразование Лапласа переводит это уравнение в алгебраическое

$$pX(p) - 1 - 2X(p) = \frac{1}{p-2}, \qquad X(p) = \frac{p-1}{(p-2)^2},$$

откуда находим $x(t)$ либо по свойствам, разложив

$$\frac{p-1}{(p-2)^2} = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{(p-2)^2},$$

либо вычисляв явно интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{p-1}{(p-2)^2} dp, \qquad c > 2$$

с ответом $x(t) = (1+t)e^{2t}$ при $t > 0$.