Вопросы к коллоквиуму за 1 модуль 2020/21 уч. г. по курсу «Дифференциальные уравнения»

Билет коллоквиума будет состоять из двух вопросов из списка. На подготовку даётся 45 минут, но уже через 30 минут вы должны быть готовы ответить минимум на один вопрос билета.

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение и его решение (определения). Сведение дифференциального уравнения (системы) высокого порядка к системе уравнений первого порядка. Задача Коши для уравнений (систем) первого и высших порядков. Задача Коши с параметром. Сведение её к задаче Коши, где параметр входит только в начальное условие.

2. Теорема локального существования и единственности решения задачи Коши (формулировка). Сведение к эквивалентному интегральному уравнению. Примеры уравнений, когда единственность отсутствует.

3. Теорема локального существования и единственности решения задачи Коши (формулировка). Существование и единственность решений соответствующего интегрального уравнения.

4. Теорема о локальной непрерывной зависимости решений задачи Коши от параметров. Принцип сжимающих отображений с параметром.

5. Глобальная единственность решений ОДУ. Продолжение решений ОДУ. Максимальный интервал продолжимости решения. Примеры уравнений, где решение определено не на всём интервале времени, где определена правая часть.

6. Глобальная непрерывная зависимость решений ДУ от параметров. Теорема о продолжении решения до границы компакта.

7. Оператор Коши ДУ и его свойства. Автономные ДУ. Сдвиг по времени переводит решения в решения. Преобразования потока автономного ДУ и их свойства.

8. Геометрический взгляд на ДУ: расширенное фазовое пространство, поле направлений и интегральные кривые; фазовое пространство (для автономного ДУ), векторное поле и траектории. Фазовое пространство разбивается на траектории.

9. Линейные системы ДУ. Продолжимость решений системы $\dot{x} = A(t)x + b(t)$ на весь интервал определения $A(t)$ и $b(t)$.

10. Теорема о дифференцировании решений задачи Коши по параметру.

11. Теорема о выпрямлении векторного поля.

12. Касательное пространство к $\mathbb{R}^n$ в точке[1]: определение через классы эквивалентности кривых. Базис $(\partial/\partial x^i)$ в $T_p\mathbb{R}^n$, порождаемый локальной системой координат (картой) (x^i).

13. Векторное поле, формулы перехода к другой системе координат. Непрерывность и гладкость (независимость этих свойств от системы координат). Траектория векторного поля. Автономные ДУ — это векторные поля.

14. Уравнение $dy/dx = f(x,y)/g(x,y)$. Расширенное понимание его решения (в окрестности точек, где $f \neq 0$, $g = 0$). Связь между решениями этого уравнения и системы $\dot{y} = f(x,y)$, $\dot{x} = g(x,y)$. Уравнения с разделяющимися переменными $dy/dx = f(x)/g(y)$ и описание всех их решений.

15. Кокасательное пространство (пространство 1-форм). Дифференциал функции как элемент $T_p^*\mathbb{R}^n$. Базис (dx^i) в кокасательном пространстве, определяемый локальной системой координат (x^i).

[1] Здесь и далее студент может по своему выбору рассказывать об аналогичных конструкциях для многообразий вместо $\mathbb{R}^n$

16. Пфаффовы уравнения $a(x, y)dx + b(x, y)dy = 0$, связь их решений с решениями уравнения $dy/dx = f(x, y)/g(x, y)$. Решение пфаффова уравнения в случае, когда $a\,dx + b\,dy = df$. Интегрирующий множитель: решение пфаффова уравнения в случае $a\,dx + b\,dy = g\,df$.

17. Замкнутые и точные 1-формы. Точная форма замкнута. Примеры, когда из замкнутости (не) следует точность: $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.