Листок 2. Операторы и осцилляторы.

Срок сдачи листка — **11 ноября 2020 г.**.

---

1. Операторы $\hat{q}$ и $\hat{p}$ получены в результате канонического квантования ($\{\cdot,\cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot,\cdot]$) классической пары обобщенных координаты q и импульса p.

   (a) Упростите выражение $e^{-\alpha\hat{p}}\, f(\hat{q})\, e^{\alpha\hat{p}}$. Здесь $\alpha \in \mathbb{C}$ – параметр, а f – гладкая функция.
   Найдите перестановочное соотношение для операторов $\hat{u} = e^{\hat{q}}$ и $\hat{v} = e^{\alpha\hat{p}}$. Сравните результат с перестановочным соотношением, которое получится, если наивно провести процедуру канонического квантования для пары e^{q}, $e^{\alpha p}$.

   (b) Докажите соотношение $e^{\alpha(\hat{p}+\hat{q})} = e^{\alpha\hat{p}}\, e^{\alpha\hat{q}}\, e^{i\hbar\frac{\alpha^2}{2}}$.
   Указание. Составьте дифференциальное уравнение для операторнозначной функции $\hat{f}(\alpha) = e^{-\alpha\hat{p}} e^{\alpha(\hat{p}+\hat{q})}$.

2. Докажите формулу Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + \frac{1}{1!}\,[\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}\,[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \dots\,,$$

   где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — операторы, действующие в конечномерном пространстве.
   Указание. Составьте дифференциальное уравнение для операторнозначной функции $\hat{F}(\alpha) = e^{\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{-\alpha\hat{A}}$.

3. В модели гармонического квантового осциллятора с одной степенью свободы, задаваемой гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{q}^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

   вычислите дисперсии наблюдаемых q и p в n-частичном состоянии. Сравните значение произведения $\Delta q \cdot \Delta p$ с ограничением, накладываемым соотношением неопределенности Гейзенберга.

4. **Осциллятор в голоморфном представлении.**
   На пространстве $\mathcal{D}$ функций вида

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} C_n \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \qquad \sum_{n\geq 0} |C_n|^2 < \infty, \quad z \in \mathbb{C},$$

   эрмитово скалярное произведение задано формулой

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{f(z)}\, g(z)\, e^{-|z|^2} d^2z, \quad \text{где} \quad d^2z = d\,\mathrm{Re}(z)\, d\,\mathrm{Im}(z) = |z|\, d|z|\, d\mathrm{Arg}(z).$$

   (a) Докажите, что функции $e_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{D}$.

   (b) Сопоставив n-частичным состояниям квантового гармонического осциллякторв базисные функции $e_n(z)$, постройте представление операторов рождения-уничтожения $\hat{a}^\dagger$ и $\hat{a}$ в пространстве $\mathcal{D}$.

5. **Когерентные состояния.**

Когерентными называются чистые состояния квантового гармонического осциллятора, являющиеся собственными векторами оператора уничтожения:

$$\hat{a}\,\phi_\lambda = \lambda\phi_\lambda, \quad |\phi_\lambda|^2 = 1.$$

Они определены для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Получите выражение для когерентного состояния ϕ_λ в виде разложения по n-частичным состояниям.

(b) Определите, как эволюционирует когерентное состояние в картине Шредингера.

(c) Вычислите среднее значение энергии осциллятора в состоянии ϕ_λ. Определите вероятность того, что энергия квантового осциллятора в состоянии ϕ_λ принимает значение $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

(d) Найдите средние значения и дисперсии наблюдаемых q и p в состоянии ϕ_λ. Сравните значение $\Delta q \cdot \Delta p$ в когерентном состоянии с ограничением, накладываемым соотношением неопределенности Гейзенберга.

(e) Постройте волновую функцию когерентного состояния $\Phi_\lambda(x)$, то есть вектор в координатном представлении, отвечающий состоянию ϕ_λ. Найдите плотность распределения вероятности того, что квантовый осциллятор находится в точке с координатой x.

Указание. Воспользуйтесь координатным представлением n-частичных состояний.

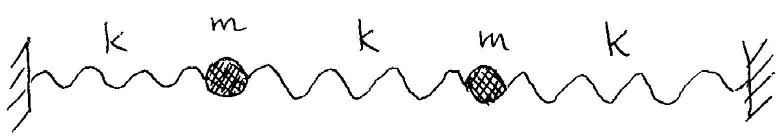
(f) Докажите полноту набора когерентных состояний:

$$\psi = \int_{\mathbb{C}} (\phi_\lambda, \psi)\, \phi_\lambda\, d^2\lambda,$$

где ψ – произвольное чистое состояние квантового осциллятора.

Указание. Используйте разложение ψ и ϕ_λ по n-частичным состояниям.

6. На рисунке изображена система двух грузиков массы m на упругих пружинах жесткости k.



(a) Составьте гамильтониан системы, используя в качестве обобщенных координат отклонения x_i, $i = 1, 2$, грузиков от положения равновесия. Подберите ортогональное преобразование

$$x'_i = \sum_{j=1,2} O_{ij} x_j, \qquad \|O_{ij}\| \text{ – ортогональная вещественная матрица,}$$

такое, чтобы квадратичная форма потенциальной энергии системы в новых координатах x'_i была диагональной. Запишите гамильтониан системы в новых координатах, определите собственные частоты колебаний грузиков и постройте общее решение классических уравнений движения системы.

(b) Проведите каноническое квантование системы в новых переменных x_i', p_i', постройте две пары операторов рождения-уничтожения $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^\dagger$ и выразите через них гамильтониан $\hat{H}$. Постройте фоковское пространство состояний квантовой системы, предполагая наличие в нем единственного вакуумного состояния $|0\rangle$:

$$\hat{a}_i |0\rangle = 0, \quad i = 1, 2.$$

Определите возможные значения энергии квантовой системы и постройте ортонормированный базис собственных векторов гамильтониана $\hat{H}$.