

Классическая теория поля 2020

Листок 2. Релятивистская кинематика и механика

Срок сдачи: до 4 ноября 2020

1. Линейный базис в алгебре Ли группы Лоренца задается шестью инфинитезимальными поворотами $L^{\mu\nu}$, $0 \leq \mu < \nu \leq 3$, затрагивающими две из четырех координат пространства Минковского: x^μ и x^ν . Алгебра Ли группы Пуанкаре вдобавок к $L^{\mu\nu}$ имеет еще четыре базисных элемента P^μ , $0 \leq \mu \leq 3$, отвечающих трансляциям вдоль координатных осей x^μ .

- а) Найдите явный вид матриц $L^{\mu\nu}$ и выразите коммутаторы $[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}]$ в виде линейных комбинаций матриц L .
- б) Найдите коммутаторы элементов $L^{\mu\nu}$ и P^ρ .

2. Тележка катится по столу с постоянной скоростью v . По тележке в том же направлении катится вторая тележка со скоростью v относительно первой. По второй тележке катится третья с той же скоростью v относительно второй и так далее. Определите скорость n -й тележки относительно стола.

3. Зеркало движется перпендикулярно своей плоскости с постоянной скоростью v относительно источника света. В системе покоя источника света падающий луч направлен под углом θ к нормали зеркала (то есть, к прямой, перпендикулярной плоскости зеркала).

- а) Какой угол к нормали зеркала образует отраженный луч света в этой системе отсчета?
- б) Как изменяется в той же системе отсчета энергия луча при отражении?

Подсказка: для ответа на этот вопрос удобно использовать связь энергии и 3-импульса свободной релятивистской частицы, известную под названием *дисперсионное соотношение*.

- в) Как изменится ответ на вопрос пункта а), если зеркало движется не перпендикулярно, а параллельно своей плоскости?

При решении задачи следует принять во внимание закон отражения в системе отсчета, где зеркало покоится: угол отражения луча равен углу его падения на плоскость зеркала (углы отсчитываются от нормали к плоскости зеркала).

4. **β -распад.** Покоящийся нейтрон претерпевает, так называемый, β -распад, одним из продуктов которого является электрон. В системе покоя нейтрона направления вылета электрона равновероятны, а модуль его 3-импульса равен P . В эксперименте наблюдают β -распад нейтрона, который движется относительно лаборатории со скоростью V .

- а) Каково геометрическое место концов вектора импульса \vec{p} электрона в лабораторной системе отсчета?
- б) При каком соотношении P и V наблюдатель в лабораторной системе не будет регистрировать вылета электронов под некоторыми углами относительно направления полета нейтрона?

5. Явление комптоновского рассеяния. Фотон частоты ν налетает на покоящийся электрон массы m и после столкновения движется под углом θ к направлению своего исходного импульса. Покажите, что частота ν' рассеянного фотона выражается формулой:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2}(1 - \cos \theta),$$

где c – скорость света, а h – постоянная Планка, которая связывает энергию фотона E с его частотой квантовомеханической формулой $E = h\nu$.

6. Сопутствующей называется инерциальная система отсчета, в которой в данный момент времени частица покоится в начале координат. При неравномерном (несвободном) движении частицы сопутствующие системы все время меняются. В релятивистской механике равноускоренным называется движение частицы, которая в каждый момент времени испытывает постоянное 3-ускорение в сопутствующей системе отсчета.

В начальный момент времени ракета, покоящаяся в лабораторной системе отсчета (связанной с Землей), начинает движение с постоянным (для пассажиров ракеты) 3-ускорением $g = 10 \text{ м/с}^2$. Цель экспедиции, отправляющейся на ракете, — посетить другой край нашей Галактики (наша Галактика называется Млечный Путь, ее поперечные размеры примерно 100 000 световых лет или $d = 10^{21}$ метров). Режим полета ракеты: половину пути до края галактики — движение с постоянным 3-ускорением g , затем вторую половину пути — торможение с тем же ускорением. Достигнув цели полета ракета сразу отправляется в обратный путь к Земле в таком же режиме. Ответьте на следующие вопросы:

- а) Сколько времени по часам путешественников займет полет до цели и какова будет длительность всей экспедиции? Хватит ли на это жизни одного поколения космонавтов (порядка 60 лет)?
- б) Сколько времени пройдет на Земле от старта до возвращения экспедиции?
- в) Какова будет длина корпуса ракеты с точки зрения земного наблюдателя в момент достижения ракетой максимальной скорости (в середине полета)? Длина ракеты на Земле перед стартом составляла 1000 метров.
- г) На какую величину (в метрах в секунду) максимальная скорость ракеты будет отличаться от скорости света $c = 299\,792\,458 \text{ м/с}$?