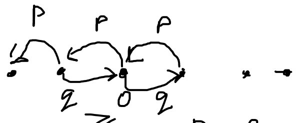
Лекция 16.10. Примеры МЦ
16 октября 2020 г.
16:18

1. Случайное блуждание



Пусть $\eta_1, \dots, \eta_T$ — iid (независимые одинак. распр. случайные величины) $\quad p,\ q = 1-p \qquad M > 0.$

с распред. Бернулли, т.е. $P(\eta_i = -1) = p$, $P(\eta_i = 1) = q = 1-p$.

Пусть ξ_0 — сл. величина, независимая от $\eta_1, \dots, \eta_T$, $\xi_0 \in \mathbb{Z} \cap [-M, M]$.

Пусть $\xi_n = \xi_0 + \sum_{i=1}^{n} \eta_i$. $\qquad$ Пример: $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = \eta_1$, $\xi_2 = \eta_1 + \eta_2$

Утв. 14 Посл-ть сл. вел. $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_T$ образуют МЦ.

Проверим условия Леммы 2.

а) $p^{(0)} = P_{\xi_0}$ — распред. ξ_0. OK

б) $P(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) \overset{?}{=} P(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1})$ //

если $P(\xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) \neq 0$.

//

$$P(\xi_{k-1} + \eta_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) \underset{\boxed{\text{упр}}}{=} P(\eta_k = i_k - i_{k-1} \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}, \dots, \xi_0 = i_0) =$$

$$= P(\eta_k = i_k - i_{k-1}), \text{ так как } \xi_0, \dots, \xi_{k-1} \underset{\text{нез-сть}}{\perp} \eta_k.$$

Утв. $A, B \subset \Omega$ — незав., то $P(A \mid B) = P(A)$. $\quad$ Д-во: $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}}$.

События $\{\eta_k \in X\}$, $\{(\xi_{k-1}, \dots, \xi_0) \in Y\}$ — независимы.

$$P(\eta_k = i_k - i_{k-1}) = \begin{cases} p, & i_k = i_{k-1} - 1 \\ q, & i_k = i_{k-1} + 1 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

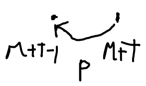
в) $P(\xi_k = i_k \mid \xi_{k-1} = i_{k-1}) = P(\eta_k = i_k - i_{k-1}) =$

Следовательно, по Лемме 2, $\xi_0, \dots, \xi_T$ — МЦ с вер-ми перехода и нач. распред. $p^{(0)} = P_{\xi_0}$.

Проблема: какое мн-во состояний? Если мы смотрим на случ. блужд. до момента времени T, то мн-во состояний — конечно $\Rightarrow$ OK.

$-M-T \le \xi_k \le M+T \quad \forall\ 0 \le k \le T.$

Формализм: Чему равна $p_{M+T\ M+T-1}$? её определять бессмысленно. $\quad p$

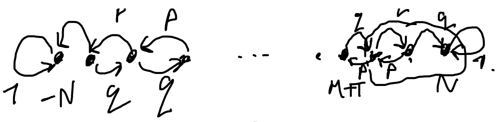


Определены не все вер-ти перехода $\to$ ничего страшного.

Способы избавиться от этого:

1) рассмотреть счётное мн-во состояний $\Rightarrow$ доп. техн. ф-ти.

2) $N > M+T$. $\quad p \quad$ мн-во состояний $[-N, N] \cap \mathbb{Z}$.



Граничные условия

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & & \\ q & 0 & p & & & \\ & q & 0 & p & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & q & 0 & p \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

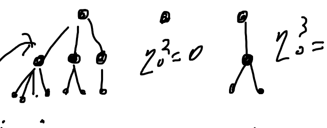
2. Модель Гальтона – Ватсона (процесс рождения – гибели)
ветвящиеся процессы.

Посл-ть случ. величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$.

ξ_n – размер популяции в n-ом поколении.

$\xi_0 = 3$

$\xi_1 = 4.$



ξ_0 – заданная случ. величина,

$\xi_0 \in \mathbb{Z} \cap [-M, M]$, $\xi_0 \neq 0$.

$\eta_0^1 = 3$ $\quad \eta_0^i, \eta_1^i, \eta_2^i, \dots$ – iid $\qquad \xi_{n+1} = \eta_n^1 + \dots + \eta_n^{\xi_n}$

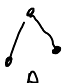
$i = 1, 2, 3, \dots$ $\qquad \eta_n^j$ – число потомков j-ого индивидуума из n-ого поколения

$\boxed{\xi_0 \perp\!\!\!\perp \eta_i^j}$

$\eta_i^j \in \mathbb{Z} \cap [-K, K]$. $\qquad \xi_0, \dots, \xi_T$. $\qquad \xi_j \leq M K^j < \infty$.

Задача Покажите, что $\xi_0, \dots, \xi_T$ образуют МЦ.

В случае, когда η_i^j имеют распределение $\mathbb{P}(\eta_i^j = 2) = p$, $\mathbb{P}(\eta_i^j = 0) = 1 - p$, $0 < p < 1$, найти вероятности перехода.

Бактерия:  $q = 1 - p$.

Francis Galton (1822–1911). $\qquad$ Y-хромосомы.

Теор 15 $\quad \mathbb{P}(\exists n : \xi_n = 0) \begin{cases} = 1, & \text{если } \mathbb{E}\eta_n^i \leq 1 \\ < 1, & \text{если } \mathbb{E}\eta_n^i > 1 \end{cases}$, если $\eta_n^i \not\equiv \text{const}$.

$\varepsilon := \mathbb{P}(\exists n : \xi_k = 0 \ \forall k \geq n)$

$\eta_n^i \equiv 1$.
$\xi_n = \xi_0$.

Д-во: Шаг 1 Задача Допустим теорема доказана в случае $\xi_0 = 1$. Вывести отсюда теорему для произвольного (случайного ξ_0).

Шаг 2 Метод производящих ф-ций.

Опр Производящей ф-цией случ. вел. $X \in \mathbb{N}$ наз-ся

$\varphi_X(z) = \mathbb{E} z^X$, $|z| \leq 1$. $\qquad |\varphi(z)| \leq \mathbb{E}|z|^X \leq \mathbb{E}\,1 = 1$.

$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, \mathbb{P}(X = k)$, где $0^0 := 1$ (тогда $\varphi(z)$ непр-на при $z = 0$).
$\varphi(0) = \mathbb{P}(X = 0)$.

Пусть $\varphi_n = \varphi_{\xi_n}$. Тогда $\varphi_n(0) = \mathbb{P}(\xi_n = 0) = \mathbb{P}(\xi_m = 0 \ \forall m \geq n)$.

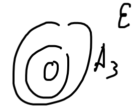
$\Rightarrow \mathbb{P}(\exists n : \xi_m = 0 \ \forall m \geq n) = \lim \mathbb{P}(\xi_m = 0 \ \forall m \geq n) = \boxed{\lim \varphi_n(0)}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\exists n: \xi_m = 0 \ \forall m \geq n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_m = 0 \ \forall m \geq n) = \boxed{\lim_{n\to\infty} \varphi_n(0)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \varphi_n(0)} = \varepsilon$$

A

Непрерывность $\mathbb{P}$: $A_i \subset \Omega$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, то $\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A)$.



$A_n = \mathbb{P}(\xi_m = 0 \ \forall m \geq n)$

$A_n \subset A_{n+1}$.

ШАГ 3 В силу шага 1, считаем что $\xi_0 = 1$. Тогда $\varphi_0(z) = \mathbb{E} z^{\xi_0} = z$.

$$\varphi_1(z) = \mathbb{E} z^{\xi_1} = \mathbb{E} z^{\eta_0^1} = \mathbb{E} z^{\eta_i^j} = \varphi_{\eta_i^j}(z) =: \varphi(z)$$

Задача Доказать, что $\varphi_n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n \text{ раз}}$ $\forall n \geq 1$.

$$\Downarrow$$

$$\varphi_n(z) = \varphi(\varphi(\varphi \ldots \varphi(z))\ldots).$$

ШАГ 4 $\varphi_{n+1}(z) = \varphi \circ \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n}(z) = \varphi(\varphi_n(z))$.

$$\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n}(z) = \varphi_n(z)$$

φ – непр-на

$$\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1}(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\varphi_n(0)) =$$

$$= \varphi(\lim \varphi_n(0)) = \varphi(\varepsilon).$$

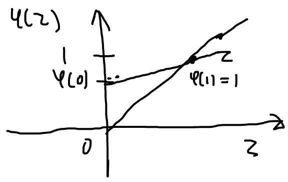
$\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$.

Упр производящая ф-ция случ. величины выпукла.

$$\frac{d}{dz}\varphi(z)\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}\Big|_{z=1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(\eta_i^j = k)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k \, \mathbb{P}(\eta_i^j = k) = \mathbb{E}\eta_i^j = \mu$$

Пусть $\mu \leq 1$.

$\varphi(1) = 1$, $\varphi(0) = \mathbb{P}(\eta_i^j = 0) \leq 1$, $\mathbb{P}(\eta_i^j = 0) \geq 0$.



φ-выпуклая

Единств. решение $\varphi(z) = z$, $0 \leq z \leq 1$: $z = 1$. $\Rightarrow \varepsilon = 1$.

Задача Доказать, что если $\mu > 1$, то $\varepsilon < 1$ и что ε – ! реш. $\varphi(z) = z$ при $0 \leq z < 1$.