

Листок 2.

1. Привести пример неборелевской функции f на отрезке, для которой все множества $f^{-1}(c)$ борелевские.

2. Привести пример двух измеримых по Лебегу функций на отрезке, композиция которых неизмерима.

3. Функция f измерима по Лебегу на отрезке $[0, 1]$, функция $g: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ непрерывна. Верно ли, что измерима композиция $f \circ g$?

4. Выяснить, при каких α и β функция $(\sin x)^\alpha x^\beta$ интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$.

5. При каких α функция $|x|^\alpha$ интегрируема по шару с центром в нуле в \mathbb{R}^n ?

6. Измеримые по Лебегу функции $f_n \geq 0$ на отрезке сходятся почти всюду к нулю. Верно ли, что интегралы от $f_n e^{-f_n}$ стремятся к нулю?

7. Вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 (\sin \sin \sin t)^n dt \right)^{1/n}.$$

8. Функция f на $[0, 1] \times [0, 1]$ такова, что все функции $x \mapsto f(x, t)$ интегрируемы, а все функции $t \mapsto f(x, t)$ непрерывны. Доказать, что функция

$$t \mapsto \int_0^1 f(x, t) dx$$

является борелевской.

9. Непрерывные функции f_n на отрезке сходятся поточечно к нулю, а интегралы от f_n^2 равномерно ограничены. Доказать, что интегралы от f_n стремятся к нулю.

10. Доказать, что если две вероятностные борелевские меры на прямой приписывают равные интегралы каждой ограниченной непрерывной функции, то они равны.