Теория функций комплексного переменного
9 октября 2020

1. Вычислите определенные интегралы (а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx$, (б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx$, (в) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\pi x}\,\frac{\sin ax}{\sinh \pi x}\,dx$, (г) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{\cosh x}$, (д) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{\sinh x}$, (е) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\pi^2)\cosh x}$.

2. Рассмотрим аналитическое продолжение функции $f(z)=\sqrt{z^2+9}$, заданной в окрестности точки $z=4$ условием $f(4)=5$, вдоль а) полуокружности $|z|=4$, $\operatorname{Im} z\ge 0$, б) полуокружности $|z|=4$, $\operatorname{Im} z<0$, с) отрезка $[-4,4]$. Чему равно $f(-4)$ во всех этих случаях?

3. Фиксируем какую-либо ветвь функции $f(z)=\sqrt{z^2-9}$ в окрестности точки $z=5$ и рассмотрим два способа ее аналитического продолжения из точки $z=5$ в точку $x\in[-3,3]$: вдоль дуги полуокружности в верхней полуплоскости и вдоль дуги полуокружности в нижней полуплоскости. Результаты обозначим $f(x+i0)$ и $f(x-i0)$ соответственно. Как связаны между собой $f(x+i0)$ и $f(x-i0)$?

4. Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\log\dfrac{1-z}{1+z}$ в области $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, такая, что $h(0+i0)=0$. Найдите значения $h(0-i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Разложите функцию $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности ∞.

5. Пусть D – вся комплексная плоскость с разрезами по лучам $[-\infty,-1]$ и $[1,+\infty]$, а $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\log(1-z^2)$ в области D, удовлетворяющая условию $h(0)=0$. Найдите $h(i)$, $h(-i)$, $h(2+i0)$, $h(2-i0)$.

6. Исследуйте поведение каждой из однозначных ветвей заданных аналитических функций в окрестности указанных точек и определите тип особенностей (если они есть):
а) $\dfrac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z=4$, б) $z+\sqrt{z^2-1}$, $z=\infty$, в) $\dfrac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z=1$, г) $\cos\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=1$, д) $\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{z/(z-1)}}$, $z=\infty$.