

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО  
16 ОКТЯБРЯ 2020

1. Вычислите определенный интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \pi^2) \cosh x}$ .

2. Рассмотрим аналитическое продолжение функции  $f(z) = \sqrt{z^2 + 9}$ , заданной в окрестности точки  $z = 4$  условием  $f(4) = 5$ , вдоль а) полуокружности  $|z| = 4$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ , б) полуокружности  $|z| = 4$ ,  $\text{Im } z < 0$ , в) отрезка  $[-4, 4]$ . Чему равно  $f(-4)$  во всех этих случаях?

3. Фиксируем какую-либо ветвь функции  $f(z) = \sqrt{z^2 - 9}$  в окрестности точки  $z = 5$  и рассмотрим два способа ее аналитического продолжения из точки  $z = 5$  в точку  $x \in [-3, 3]$ : вдоль дуги полуокружности в верхней полуплоскости и вдоль дуги полуокружности в нижней полуплоскости. Результаты обозначим  $f(x + i0)$  и  $f(x - i0)$  соответственно. Как связаны между собой  $f(x + i0)$  и  $f(x - i0)$ ?

4. Пусть  $D$  – вся комплексная плоскость с разрезами по отрезкам  $[-1, i]$  и  $[-i, 1]$ , а  $h(z)$  – регулярная ветвь функции  $\sqrt{1 - z^4}$ , положительная на интервале  $(-1, 1)$ . Найдите значения  $h(\sqrt{5/3})$ ,  $h(i\sqrt{5/3})$ .

5. Пусть  $h(z)$  – регулярная ветвь функции  $\sqrt[3]{1 - z^2}$  в области  $D$ , удовлетворяющая условию  $h(0) = 1$ . Найдите значение  $h(-3)$  в случаях, когда область  $D$  а) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам  $[1, +\infty]$  и  $[-1, -1 + i\infty]$ , б) вся комплексная плоскость с разрезами по лучам  $[1, 1 - i\infty]$  и  $[-1, -1 - i\infty]$ .

6. Пусть  $h(z)$  – регулярная ветвь многозначной функции  $\log \frac{1 - z}{1 + z}$  в области  $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , такая, что  $h(0 + i0) = 0$ . Найдите значения  $h(0 - i0)$ ,  $h(i)$ ,  $h(\infty)$ . Разложите функцию  $h(z)$  в ряд Лорана по степеням  $z$  в окрестности  $\infty$ .

7. Пусть  $D$  – вся комплексная плоскость с разрезами по лучам  $[-\infty, -1]$  и  $[1, +\infty]$ , а  $h(z)$  – регулярная ветвь многозначной функции  $\log(1 - z^2)$  в области  $D$ , удовлетворяющая условию  $h(0) = 0$ . Найдите  $h(i)$ ,  $h(-i)$ ,  $h(2 + i0)$ ,  $h(2 - i0)$ .

8. Исследуйте поведение каждой из однозначных ветвей заданных аналитических функций в окрестности указанных точек и определите тип особенностей (если они есть):

- а)  $\frac{z}{1 + \sqrt{z - 3}}$ ,  $z = 4$ , б)  $z + \sqrt{z^2 - 1}$ ,  $z = \infty$ , в)  $\frac{2z + 3}{1 + z - 2\sqrt{z}}$ ,  $z = 1$ ,  
г)  $\cos \frac{1}{1 + \sqrt{z}}$ ,  $z = 1$ , д)  $\sin \frac{1}{1 + \sqrt{z/(z - 1)}}$ ,  $z = \infty$ .