Семинар 7

1. В пространстве V выбран базис e_1, e_2, e_3, а в пространстве V^* – двойственный базис f_1, f_2, f_3. Требуется:
а) подвергнуть тензор $f_1 \otimes f_2 \otimes f_1$ симметризации и найти значение полученного симметрического тензора на тройке векторов (v, v, v), $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$;
б) проделать то же самое с тензором $f_1 \bigotimes f_2 \bigotimes f_3$ и тензором $f_1 \bigotimes f_1 \bigotimes f_1$. Попробовать сделать полезные выводы из наблюдаемых ответов.

2. Показать, что $(a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n) \wedge \ldots \wedge (a_{n1}v_1 + \ldots + a_{nn}v_n) = \gamma v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$, и вычислить γ.

3. Доказать, что необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов $v_1, \ldots, v_r$ состоит в том, что $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = 0$.

4. Каждому r-мерному подпространству $W \subset V$ сопоставим r-вектор $P_w = e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$. Доказать,что r-вектор P_W отличен от нуля и, с точностью до пропорциональности, не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$ в подпространстве W.

5. Доказать, что подпространства W_1 и W_2 совпадают тогда и только тогда, когда $P_{W_1} = \lambda P_{W_2}$ (С: использовать результат задачи 3).

6. Нильпотентный оператор записывается в некотором базисе четырехмерного векторного пространства жордановой клеткой. Найти жорданов базис и жорданову форму его второй внешней степени.