Семинар 5.

Задача 1. На проективной прямой $\mathbb{P}^1 = P(V)$, $\dim_{\mathbf{k}} V = 2$, даны четыре различные точки $A = \langle x \rangle$, $B = \langle y \rangle$, $C = \langle z \rangle$, $D = \langle w \rangle$. Так как $A \neq B$, векторы x и y в V неколлинеарны, а значит, образуют базис в V. Поэтому векторы z и w из V разлагаются по базису x, y в виде $z = \alpha x + \beta y$, $w = \alpha' x + \beta' y$, где $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \neq 0$, поскольку точки C и D отличны от точек A и B. Определим двойное отношение $(ABCD)$ точек A, B, C и D формулой $(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} / \frac{\beta'}{\alpha'}$.
1) Совпадает ли эта формула с формулой двойного отношения $(ABCD)$, введенной в курсе геометрии?
2) Верны ли равенства $(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA)$?

Задача 2. Пусть в условиях задачи 1 на $\mathbb{P}^1$ введены проективные координаты $(u_0 : u_1)$, и пусть точки A, B, C и D имеют проективные координаты $(x_0 : x_1)$, $(y_0 : y_1)$, $(z_0 : z_1)$, $(w_0 : w_1)$. Введем обозначение $|\mathbf{xz}| := \begin{vmatrix} x_0 & z_0 \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}$, и аналогично обозначения $|\mathbf{xw}|$, $|\mathbf{yz}|$, $|\mathbf{yw}|$.
1) Покажите, что

$$(ABCD) = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{xw}|} \bigg/ \frac{|\mathbf{yz}|}{|\mathbf{yw}|} = \frac{|\mathbf{xz}|}{|\mathbf{yz}|} \bigg/ \frac{|\mathbf{xw}|}{|\mathbf{yw}|}.$$

2) Введем на $\mathbb{P}^1$ аффинную координату $u = u_1/u_0$, и пусть точки A, B, C и D имеют аффиннные координаты x, y, z и w соответственно. Покажите, что

$$(ABCD) = \frac{x-z}{x-w} \bigg/ \frac{y-z}{y-w}.$$

Задача 3. В условиях задачи 2.2 пусть точки A, B, C и X имеют аффинные координаты $0,\ 1,\ \infty$ и x соответственно. Равно ли x двойному отношению точек A, B, C, X, записанных в подходящем порядке?

Задача 4. Сколько различных значений принимает двойное отношение 4 точек A, B, C и D при их всевозможных перестановках?