НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Равновесия Нэша (продолжение)

Лекция 10

Сушко Артем

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

26 октября 2020 г.

Сравнение с предыдущими понятиями

а) Доминирующие стратегии. Равновесие в доминирующих стратегиях очевидно будет являться равновесием Нэша.

Сравнение с предыдущими понятиями

a) Доминирующие стратегии. Равновесие в доминирующих стратегиях очевидно будет являться равновесием Нэша.

b) Осторожные стратегии. В общем случае осторожные стратегии слабо связаны с равновесием Нэша, но для антагонистических игр связь усиливается. Равновесие Нэша в такой игре является седловой парой, поэтому равновесные стратегии являются осторожными. Однако если игра не имеет цены, то осторожные стратегии не образуют равновесие.

Сравнение с предыдущими понятиями

а) Доминирующие стратегии. Равновесие в доминирующих стратегиях очевидно будет являться равновесием Нэша.

b) Осторожные стратегии. В общем случае осторожные стратегии слабо связаны с равновесием Нэша, но для антагонистических игр связь усиливается. Равновесие Нэша в такой игре является седловой парой, поэтому равновесные стратегии являются осторожными. Однако если игра не имеет цены, то осторожные стратегии не образуют равновесие.

Лемма

Если s_N^*–равновесие Нэша, то $u_i(s_N^*) \geq \alpha_i$ для любого игрока i. Сравнив равновесную стратегию s_i^* с осторожной s_{*i}, мы имеем $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_{*i}, s_{-i}^*) \geq \alpha_i$.

Сравнение с предыдущими понятиями

c) *Исключение доминируемых стратегий.* Если стратегия входит в равновесие, то она выживает при последовательном исключении сильно доминируемых стратегий.

Сравнение с предыдущими понятиями

c) *Исключение доминируемых стратегий.* Если стратегия входит в равновесие, то она выживает при последовательном исключении сильно доминируемых стратегий.

Лемма

Пусть для каждого i заданы подмножества $S_i' \subset S_i$. Предположим, что s_N^*–равновесие в игре $(N, (S_i), (u_i))$, и кроме того $s_i^* \in S_i'$ для любого i. Тогда s_N^* является равновесием в игре $(N, (S_i'), (u_i|_{S_i'}))$

Сравнение с предыдущими понятиями

c) *Исключение доминируемых стратегий.* Если стратегия входит в равновесие, то она выживает при последовательном исключении сильно доминируемых стратегий.

Лемма

Пусть для каждого i заданы подмножества $S_i' \subset S_i$. Предположим, что s_N^*–равновесие в игре $(N, (S_i), (u_i))$, и кроме того $s_i^* \in S_i'$ для любого i. Тогда s_N^* является равновесием в игре $(N, (S_i'), (u_i|_{S_i'}))$

Если G^∞–игра, полученная последовательным исключением сильно доминируемых стратегий, то из вышесказанного:

$$NE(G) \subset NE(G^\infty)$$

Равновесие Нэша
и конкурентные равновесия

Имеется несколько агентов, которые реагируют на цены p и принимают оптимальные решения x_i. Равновесие достигается когда x_i удовлетворяют неким балансам, например $\Sigma_i x_i \leq 0$.

Равновесие Нэша
и конкурентные равновесия

Имеется несколько агентов, которые реагируют на цены p и принимают оптимальные решения x_i. Равновесие достигается когда x_i удовлетворяют неким балансам, например $\Sigma_i x_i \leq 0$. Введем фиктивного игрока 0 с фиктивной полезностью, равной $p(\Sigma_i x_i)$. Тогда равновесие Нэша $(p^*, (x_i^*))$ в этой игре дает конкурентное экономическое равновесие.

Равновесие Нэша и конкурентные равновесия

Имеется несколько агентов, которые реагируют на цены p и принимают оптимальные решения x_i. Равновесие достигается когда x_i удовлетворяют неким балансам, например $\Sigma_i x_i \leq 0$. Введем фиктивного игрока 0 с фиктивной полезностью, равной $p(\Sigma_i x_i)$. Тогда равновесие Нэша $(p^*, (x_i^*))$ в этой игре дает конкурентное экономическое равновесие. Проверим выполнение балансов: Если некоторые компоненты вектора Σx_i^* положительны, то оптимальное значение $(p^*, (x_i^*)) \geq 0$. Но из закона Вальраса стоимость Σx_i^* равна 0 при p^*. Получаем противоречие, из которого получаем $\Sigma x_i^* \leq 0$.

Голосования с опросом

Пусть X–множество кандидатов; у каждого игрока функция полезности u_i на X. S_i–множество заполнений бюллетеней для игрока i. Схема голосования задается функцией $f : \times S_i \to X$.

Голосования с опросом

Пусть X–множество кандидатов; у каждого игрока функция полезности u_i на X. S_i–множество заполнений бюллетеней для игрока i. Схема голосования задается функцией $f : \times S_i \to X$. Y–множество возможных результатов опроса. Для каждого избирателя есть функция $\phi_i : Y \to X$, зависящая от u_i. Тем самым определено отображение $\Phi : Y \to X$. Последним задаем отображение $\Psi : X \to Y$. Равновесием в этой игре называется пара (x^*, y^*), т.ч. $\Psi(x^*) = y^*$ и $\phi(y^*) = x^*$.

Применения к олигополии

$C_i(q)$–издержки фирмы при выпуске товара в количестве q. Фирмы независимо принимают решения о выпуске q_i. Полный выпуск $Q = q_1 + q_2$. Цена товара задается обратной функцией спроса $P = P(Q)$. Поэтому прибыль каждой фирмы равна:

$$\pi_i = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i).$$

Применения к олигополии

$C_i(q)$–издержки фирмы при выпуске товара в количестве q. Фирмы независимо принимают решения о выпуске q_i. Полный выпуск $Q = q_1 + q_2$. Цена товара задается обратной функцией спроса $P = P(Q)$. Поэтому прибыль каждой фирмы равна:

$$\pi_i = q_i P(q_1 + q_2) - C_i(q_i).$$

Условия максимизации первого порядка:

$$P(q_1 + q_2) + q_i P'(q_1 + q_2) = (dC_i/dq_i)(q_i).$$

Применения к олигополии

Упростим полученное выражение считая издержки линейными, $C_i(q) = cq$, а $P(Q) = M + Q$, где M– максимальная цена продажи товара. Получаем:

$$\pi_i(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_i$$

Применения к олигополии

Упростим полученное выражение считая издержки линейными, $C_i(q) = cq$, а $P(Q) = M + Q$, где M– максимальная цена продажи товара. Получаем:

$$\pi_i(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_i$$

$$d\pi_i/dq_1 = M - c - 2q_1 - q_2 = 0.$$

Применения к олигополии

Упростим полученное выражение считая издержки линейными, $C_i(q) = cq$, а $P(Q) = M + Q$, где M– максимальная цена продажи товара. Получаем:

$$\pi_i(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_i$$

$$d\pi_i/dq_1 = M - c - 2q_1 - q_2 = 0.$$

Из выражений выше мы получаем:

$$q_1^* = R_1(q_2) = (M - c - q_2)/2.$$

Применения к олигополии

Упростим полученное выражение считая издержки линейными, $C_i(q) = cq$, а $P(Q) = M + Q$, где M– максимальная цена продажи товара. Получаем:

$$\pi_i(q_1, q_2) = (M - c - q_1 - q_2)q_i$$

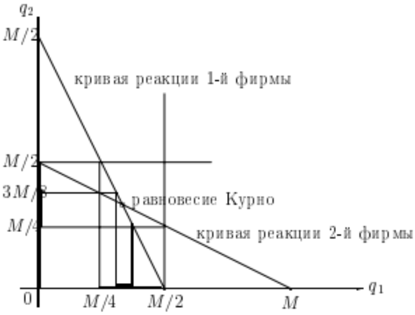
$$d\pi_i/dq_1 = M - c - 2q_1 - q_2 = 0.$$

Из выражений выше мы получаем:

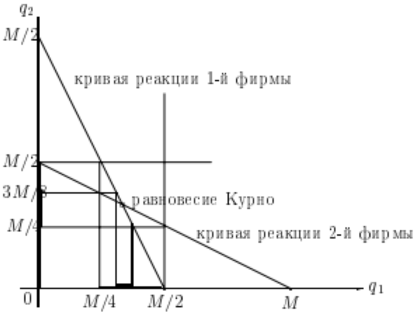
$$q_1^* = R_1(q_2) = (M - c - q_2)/2.$$

Равновесие получается в точке пересечения кривых реакций и $q_i^* = (M - c)/3$, при этом цены равны $p^* = (M + 2c)/3$.

Применения к олигополии



Применения к олигополии



Если бы у нас была монополия, ее прибыль максимизировалась бы при $q = (M - c)/2$ по цене $p^m = (M + c)/2$

Добровольное финансирование общественного блага

$u_i(y)$–трансферабельная полезность общественного блага для i. Функция выигрыша в нашей игре:

$$u_i(f(\Sigma_j t_j)) - t_i.$$

Добровольное финансирование общественного блага

$u_i(y)$–трансферабельная полезность общественного блага для i. Функция выигрыша в нашей игре:

$$u_i(f(\Sigma_j t_j)) - t_i.$$

Пример (Законопроект)

Картель из 9 фирм хочет протолкнуть законопроект, сулящий каждой фирме прибавок в 40000\$. Для лоббирования законопроекта фирмы вносят по t_i тыс. Вероятность прохождения проекта равна $p = t/(10 + t)$, где $t = \Sigma_i t_i$.

Добровольное финансирование общественного блага

Найдем равновесие Нэша.
Ожидаемый выигрыш фирмы равен $40(t/(10+t)) - t_i$, продифференцировав получим $400 = (t+10)^2$, т.е. $t = 10$. Итого мы соберем 10 тыс. (примерно по 1,1 с каждой). Полная прибыль картеля составит 170 тыс. В то же время оптимальный для картеля уровень затрат находится из максимизации $9 \cdot 40(t/(10+t)) - t$, откуда получаем $t = 50$. Полная прибыль картеля составила бы тогда 250 тыс.

Теорема (Теорема Нэша)

Предположим, что в игре $(N, (S_i), (u_i))$ *все множества* S_i*–выпуклые компакты, а функции выигрыша* u_i*–непрерывны и вогнуты. Тогда существует хоть одно равновесие Нэша.*

Теорема (Теорема Нэша)

Предположим, что в игре $(N, (S_i), (u_i))$ все множества S_i–выпуклые компакты, а функции выигрыша u_i–непрерывны и вогнуты. Тогда существует хоть одно равновесие Нэша.

Для каждой ситуации $s_N \in S_N = S_1 \times \ldots \times S_n$ и игрока i рассмотрим наилучший ответ $Best_i(s_N) = Argmax(u_i(\cdot, s_{-i}))$.

Теорема Нэша

Теорема (Теорема Нэша)

Предположим, что в игре $(N, (S_i), (u_i))$ все множества S_i–выпуклые компакты, а функции выигрыша u_i–непрерывны и вогнуты. Тогда существует хоть одно равновесие Нэша.

Для каждой ситуации $s_N \in S_N = S_1 \times \ldots \times S_n$ и игрока i рассмотрим наилучший ответ $Best_i(s_N) = Argmax(u_i(\cdot, s_{-i}))$. Рассмотрим соответствие $F : S_N \rightrightarrows S_N$, которое т. s_N переводит в множество $Best_1(s_N) \times \ldots \times Best_n(s_N)$. По теореме Какутани о неподвижной точки $s_N^* \in F(s_N^*)$. Понятно, что s_N^* будет равновесием Нэша.

Спасибо за внимание!