Прикладные методы анализа 2020
Занятие 13.10.2020

1. Преобразование Фурье

Ряд Фурье. Пусть дана функция $f(t) \in L^2[-\pi, \pi]$. Определив т. н. коэффициенты Фурье формулами

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}, \qquad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

мы сопоставляем функции $f(t)$ ряд

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{ikt}. \tag{2}$$

Уравнение (2) определяет разложение по системе функций $\{\mathrm{e}^{ikt},\, k \in \mathbb{Z}\}$. Изначально ряд Фурье (21.12.1807) был определён как разложение по системе $\{1,\, \sin nt,\, \cos nt,\, n \in \mathbb{N}\}$,

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{3}$$

где коэффициенты Фурье определяются интегралами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt f(t), \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt f(t)\cos nt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt f(t)\sin nt. \tag{4}$$

Коэффициенты разложения (2) и (3) связаны соотношениями

$$c_k = \begin{cases} (a_k - \mathrm{i}b_k)/2, & k \in \mathbb{Z}_{>0} \\ a_0/2, & k = 0 \\ (a_{-k} + \mathrm{i}b_{-k})/2, & k \in \mathbb{Z}_{<0} \end{cases}$$

Теорема. Для любой функции $f \in L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

сходится к f в среднем, и имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

Последнее основано на полноте системы функций $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\}$.

В гильбертовом пространстве выполняется неравентсво Бесселя

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt |f(t)|^2 \geq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2,$$

откуда следует, что не всякая функция, для которой ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(\mathrm{i}kt)$ сходится, принадлежит $L^2([\pi, \pi], \mathbb{C})$. Например, тригонометрический ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin nt}{\sqrt{n}}$ сходится на $\mathbb{R}$, но он не является рядом Фурье никакой функции f из $L^2[-\pi, \pi]$, так как ряд $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{\sqrt{n}})^2$ расходится.

Сходимость в L^2 трактуется как сходимость в среднем, т. е. по норме

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dt |f(t)|^2}.$$

Сходимость ряда понимается как сходимость последовательности частичных сумм ряда Фурье:

$$S_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}, \qquad \|f(t) - S_n(t)\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пример 1. $f(t) = t$. Из (4) находим

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2\ldots, \qquad b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$t = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin nt \text{ на } t \in [-\pi, \pi].$$

Продолжая $f(t) = t$ периодично с $[-\pi, \pi]$ на всю $\mathbb{R}$, можно считать этот ряд рядом Фурье продолженной функции,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = \begin{cases} t, & |t| < \pi \\ 0, & |t| = \pi \end{cases}$$

Ряды Фурье для функций помогают вычислять суммы числовых рядов. Например, из предыдущего, положив $t = \pi/2$, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Для оценки коэффициентов Фурье гладкой функции имеется *Лемма* (о дифференцировании ряда Фурье):

Если непрерывная на $[-\pi, \pi]$ комплекснозначная функция f, такая что $f(-\pi) = f(\pi)$, кусочно нерерывно-дифференцируема на $[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье её производной

$$f'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f') \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

может быть получен формальным дифференцированием ряда Фурье для функции $f(t)$, $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, т. е.

$$c_k(f') = \mathrm{i}kc_k(f), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Интеграл Фурье. Подставим выражения для коэффициентов Фурье (4) в ряд (3) T-периодической функции $f(t) = f(t + T)$,

$$f(t) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} d\lambda f(\lambda) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} d\lambda f(\lambda) \cos\frac{2\pi n\lambda}{T} \right\} \cos\frac{2\pi nt}{T} + \left\{ \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} d\lambda f(\lambda) \sin\frac{2\pi n\lambda}{T} \right\} \sin\frac{2\pi nt}{T} \right). \tag{5}$$

Если t – не точка разрыва, то ряд в правой части (5) сходится к $f(t)$. Если же t – точка разрыва функции f, то ряд сходится к $(f^+(t)+f^-(t))/2$, где $f^{\pm}(t)$ – право- и левосторонний пределы функции f в точке t. Из (5) следует граничное условие $f(T/2)=f(-T/2)$. Используя тригонометрические тождества, перепишем (5) в виде

$$f(t)=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}d\lambda f(\lambda)+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}d\lambda f(\lambda)\cos[\frac{2\pi n}{T}(t-\lambda)].$$

Функция $\cos[\frac{2\pi n}{T}(t-\lambda)]$, возникшая в последнем выражении, порождает известное *ядро Дирихле*, свёртка с которым выдаёт частичные суммы тригонометрического ряда Фурье. Введём обозначение $\omega_n=2\pi n/T$. Тогда имеем

$$\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T}\equiv\Delta\omega.$$

Следовательно,

$$f(t)=\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}d\lambda f(\lambda)+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}d\lambda f(\lambda)\cos[\omega_n(t-\lambda)].$$

Устремив теперь $T\to\infty$, получаем:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}d\lambda f(\lambda)\to 0,$$

так как указанный интеграл сходится согласно условию Дирихле. Далее, $\Delta\omega\to 0$ и в пределе можем заменить разность $\Delta\omega$ на дифференциал $d\omega$. При этом ω_n превращается в непрерывную переменную ω, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\to\int_0^\infty d\omega$. В результате таких (нестрогих) рассуждений получаем

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda f(\lambda)\cos(\omega(t-\lambda)).$$

Это и есть *интеграл Фурье* для функции $f(t)$. В системе $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\}$ мы бы получили интеграл вида

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t},$$

где мы считаем, что значения функции

$$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dtf(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

в точках $\omega=\omega_k$ *мало отличаются* от величин $c_k\frac{T}{2\pi}$, так что

$$f(t)\approx\sum_{k\in\mathbb{Z}}c(\omega_k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}\frac{2\pi}{T},\qquad T\to\infty.$$

Пример 2. Пусть для некоторого $a\in\mathbb{R}_+$

$$c(\omega)=\begin{cases}h, & |\omega|\le a\\ 0, & |\omega|>a\end{cases}$$

Тогда при $t\neq 0$ имеем

$$f(t)=\int_{-a}^{a}d\omega h\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}=2h\frac{\sin at}{t}.$$

Для $t = 0$ получаем $f(0) = 2ha$, что совпадает с пределом найденного выше выражения при $t \to 0$.

Пример 3. Пусть $f(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{t^2}{4\pi}$, $t \in [-\pi, \pi]$. Будем считать, что $f(t)$ продолжается на $\mathbb{R}$ периодически с $T = 2\pi$. Найдём *спектр* функции $f(t)$, т. е. коэффициенты Фурье её разложения в ряд Фурье. Имеем

$$c_k(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{6}, & k = 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi k^2}, & k \neq 0 \end{cases}$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

Видим, что периодическая функция имеет *дискретный спектр*. Полученное выше разложение позволяет просуммировать ряд $\sim \sum_k 1/k^2$. Так, полагая $t = \pi$ и $t = 0$ в $f(t)$, получаем

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{и} \qquad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

соответственно.

Преобразование Фурье. Пусть дана комплекснозначная функция вещественного аргумента $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Преобразованием Фурье функции f называется выражение

$$\mathcal{F}[f](k) \equiv \tilde{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}, \qquad k \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

при условии, что интеграл в правой части (6) определён хотя бы в смысле главного значения. Например, если f – абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то интеграл сходится абсолютно и равномерно по k на всём $\mathbb{R}$. В таком случае сопоставляемый f интеграл

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$

понимаемый так же в смысле главного значения, называется интегралом Фурье:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} := \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} dx f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}.$$

Кроме того, определяют так называемые косинус- и синус-преобразования Фурье,

$$\mathcal{F}_c[f](k) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \cos kx, \qquad \mathcal{F}_s[f](k) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \sin kx.$$

Вводя обозначения

$$c(k) = \mathcal{F}[f](k), \qquad a(k) = \mathcal{F}[f]_c(k), \qquad b(k) = \mathcal{F}_s[f](k),$$

получаем следующие соотношения:

$$c(k) = \frac{1}{2}(a(k) - \mathrm{i}b(k)), \qquad a(-k) = a(k), \qquad b(-k) = -b(k).$$

Как следствие, преобразование Фурье вполне определено на всей $\mathbb{R}$, даже если оно известно лишь для неотрицательных значений аргумента.

Пример 4. Найдём Фурье-преобразование для функции f, заданной как

$$f(t) = \frac{\sin \alpha t}{t}, \quad t \neq 0, \qquad f(0) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

По определению

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f](f) &= \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} dt \frac{\sin \alpha t}{t} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} dt \frac{\sin \alpha t \cos kt}{t} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dt \frac{\sin \alpha t \cos kt}{t} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} dt \left(\frac{\sin(\alpha + k)t}{t} + \frac{\sin(\alpha - k)t}{t} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} [\operatorname{sgn}(\alpha + k) + \operatorname{sgn}(\alpha - k)] \int_{0}^{\infty} d\tau \frac{\sin \tau}{\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \alpha, & |k| \leq |\alpha| \\ 0, & |k| > |\alpha| \end{cases}
\end{aligned}$$

В этом примере $f(t)$ не является абсолютно интегрируемой функцией на $\mathbb{R}$, и её преобразование Фурье имеет разрывы. Но преобразование Фурье абсолютно интегрируемых функций не имеет разрывов.

Имеет место *Лемма 1.* Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально интегрируема и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то

a) её преобразование Фурье $\mathcal{F}[f](k)$ определено для любых $k \in \mathbb{R}$;
b) $\mathcal{F}[f]$ – непрерывная функция из R в $\mathbb{C}$;
c) $\sup_k |\mathcal{F}[f](k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|$;
d) $\mathcal{F}[f](k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Для доказательства пунктов (a), (b) и (c) достаточно заметить, что $|f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}| \leq |f(x)|$, откуда следует абсолютная и равномерная сходимость интеграла $\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$. Пункт (d) следует из следующей

Леммы Римана: если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ локально и абсолютно интегрируема на интервале (a, b), то

$$\int_{a}^{b} dx f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Пример 5. Найдём преобразование Фурье функции Гаусса $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}[f](k) = \int_{\mathbb{R}} dt \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathrm{e}^{-t^2/2} \cos kt.$$

Продифференцировав обе части уравнения по k и затем проинтегрировав полученное выражение один раз по частям, получаем уравнение

$$\frac{d\mathcal{F}[f]}{dk}(k) + k\mathcal{F}[f](k) = 0,$$

которое удобно представить в виде

$$\frac{d}{dk} \log \mathcal{F}[f](k) = -k.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\mathcal{F}[f](k) = C \mathrm{e}^{-k^2/2},$$

где константа интегрирования C определяется из условия

$$C = \mathcal{F}[f](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \mathrm{e}^{-t^2/2} = \sqrt{2\pi}.$$

Итак, $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-t^2/2}](k) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-k^2/2}$, причём

$$\mathcal{F}_c[\mathrm{e}^{-t^2/2}](k) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-k^2/2}, \qquad \mathcal{F}_s[\mathrm{e}^{-t^2/2}](k) = 0.$$

Теорема 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – абсолютно интегрируемая функция, кусочно непрерывная на любом конечном отрезке в $\mathbb{R}$. Допустим, что f имеет только точки разрыва 1-го рода, так что в каждой точке области её определения существуют пределы $f^{\pm}(x) = \lim_{\alpha\to 0^{\pm}} f(x+\alpha)$. Пусть в каждой точке разрыва выполнено условие Дини, т. е. существует $\varepsilon > 0$, такое что

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{d\alpha}{\alpha}[(f(x-\alpha) - f^-(x)) + (f(x+\alpha) - f^+(x))]$$

сходится абсолютно (это условие более слабое, чем условие Гёльдера). Тогда интеграл Фурье $f(x) \sim \int_{\mathbb{R}} dk\tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ сходится в этой точке к $(f^+(x) + f^-(x))/2$.

Пример 6. Пусть $\alpha > 0$ и функция f задана на $\mathbb{R}$ как

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Нетрудно получить, что

$$\mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dx\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha+\mathrm{i}k} = \frac{1}{2\pi}\frac{-\mathrm{i}}{k-\mathrm{i}\alpha}.$$

Пример 7. Пусть $g_+(x) = f(x) + f(-x) = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}$, где f – функция из предыдущего примера. Тогда

$$\mathcal{F}[g_+](k) = \mathcal{F}[f](k) + \mathcal{F}[f](-k) = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+k^2}.$$

Пример 8. Пусть $g_-(x) = f(x) - f(-x)$ – нечётное продолжение функции $f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\mathcal{F}[g_-](k) = \mathcal{F}[f](k) - \mathcal{F}[f](-k) = -\frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{k}{\alpha^2+k^2}.$$

Имеем три интеграла Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\alpha+\mathrm{i}k} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha x}, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

и

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\frac{\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\alpha^2+k^2} = \mathrm{e}^{-\alpha|x|}, \qquad \frac{\mathrm{i}}{\pi}\int_{\mathbb{R}} dk\frac{k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\alpha^2+k^2} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\mathrm{e}^{-\alpha x}, & x < 0 \end{cases}$$

Отделяя в последних двух интегралах вещественную и мнимую части, получаем известные *интегралы Лапласа*

$$\int_0^{\infty} dk\frac{\cos kx}{\alpha^2+k^2} = \frac{\pi}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|x|}, \qquad \int_0^{\infty} dk\frac{\sin kx}{\alpha^2+k^2} = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\alpha|x|}\,\mathrm{sgn}\,x.$$

Пространство основных функций $\mathcal{S}$. *Утверждение.* Пусть $f \in C^{(k)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $k = 0,1,2,\ldots$, и все функции f, f', …, $f^{(k)}$ – абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\widetilde{f^{(n)}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} dx f^{(n)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = (\mathrm{i}k)^n \tilde{f}(k)$$

(доказывается последовательным интегрированием по частям).

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ – пространство всех гладких, быстроубывающих на ∞ функцй f,

$$f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)| < \infty \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}_+.$$

Множество всех таких функций образует линейное пространство. Ему принадлежат, например, e^{-x^2} и все финитные функции класса $C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Лемма 2. Ограничение преобразования Фурье на $\mathcal{S}$ является автоморфизмом $\mathcal{S}$ как линейного пространства.

1. $(f \in \mathcal{S}) \Longrightarrow (\tilde{f} \in \mathcal{S})$.

Во-первых, заметим, что $\tilde{f} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Действительно, если локально интегрируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такова, что функция $x^m f(x)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то преобразование Фурье от f принадлежит $C^{(m)}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ и $\tilde{f}^{(m)}(k) = (-\mathrm{i})^m \widetilde{x^m f(x)}(k)$. Далее, операции умножения на x^m, $m \geq 0$, и дифференцирования D не выводят из класса $\mathcal{S}$. Поэтому $D^n(x^m f(x)) \in \mathcal{S}$. Её преобразование Фурье по лемме Римана стремится к нулю на бесконечности. Но

$$D^n \widetilde{x^m f(x)})(k) = \mathrm{i}^{m+n} k^n \tilde{f}^{(m)}(k),$$

и мы имеем, что $k^n \tilde{f}^{(m)}(k) \to 0$ при $k \to \infty$, т. е. $\tilde{f} \in \mathcal{S}$.

2. Осталось показать, что $\widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$. Выберав вместо системы функций $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\}$ систему $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\ k \in \mathbb{Z}\}$, придём к следующим формулам для преобразований Фурье,

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dx f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dx f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},$$

т. е. $\tilde{f}(k) = \hat{f}(-k)$, причём

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} dk \hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad \tilde{\hat{f}} = \hat{\tilde{f}} = f.$$

Имеем $\hat{f}(k) = \tilde{f}(-k) : \mathcal{S} \to \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ при $k \to -k$. Кроме того, пусть $f \in \mathcal{S}$, тогда если $\varphi = \tilde{f} \in \mathcal{S}$, то $f = \hat{\varphi}$.

NB! С пространством $\mathcal{D}$ ситуация существенно сложнее.

Алгебраические свойства преобразования Фурье. Здесь мы обозначаем исходную функцию, как обычно, через $f(t)$, а её Фурье-образ – через $F(\omega)$. К алгебраическим свойствам преобразования Фурье относятся такие, как 1) свойство сложения (линейность),

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), \quad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega) \quad : \quad c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega);$$

2) симметрия (отражение),

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad : \quad F(\pm t) \leftrightarrow 2\pi f(\mp\omega);$$

3) подобие (изменение масштаба, $a \in \mathbb{R}^\times$),

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad : \quad f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F(\omega/a);$$

4) временной сдвиг ($a \in \mathbb{R}$),

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad : \quad f(t \pm a) \leftrightarrow \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} a\omega} F(\omega);$$

5) частотный сдвиг ($\omega_0 \in \mathbb{R}$),

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad : \quad F(\omega \pm \omega_0) \leftrightarrow \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\omega_0 t} f(t),$$

и отсюда выводится так называемая теорема о модуляции,

$$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)],$$
$$f(t) \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{\mathrm{i}}{2}[F(\omega + \omega_0) - F(\omega - \omega_0)];$$

6) дифференцирование,

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad : \quad f'(t) \leftrightarrow \mathrm{i}\omega F(\omega), \quad F'(\omega) \leftrightarrow -\mathrm{i}t f(\omega),$$

что обобщается на произвольное количество производных,

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (\mathrm{i}\omega)^n F(\omega), \qquad F^{(n)}(\omega) \leftrightarrow (-\mathrm{i}t)^n f(t);$$

7) интегрирование (снова $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$),

$$\int_{-\infty}^{t} d\tau f(\tau) \leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{i}\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega),$$
$$\int_{t}^{\infty} d\tau f(\tau) \leftrightarrow -\frac{1}{\mathrm{i}\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega).$$

Упражнение на дом: доказать свойство (7).

Сводка некоторых полезных формул.

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-a|t|}](\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2},$$
$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-at^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\omega^2/4a},$$
$$\mathcal{F}[t\mathrm{e}^{-at^2}](\omega) = -\frac{\mathrm{i}\omega}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \mathrm{e}^{-\omega^2/a}.$$

Пусть функции Π и Λ определены как

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

соответственно. Тогда имеем

$$\mathcal{F}[\Pi](\omega) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2},$$

$$\mathcal{F}[\frac{\sin at}{\pi t}](\omega) = \Pi(\frac{\omega}{2a}),$$

$$\mathcal{F}[\Pi(t+t_0) + \Pi(t-t_0)](\omega) = 2\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\cos(\omega t_0),$$

$$\mathcal{F}[\Lambda(t)](\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2.$$