Теория функций комплексного переменного
6 ноября 2020

1. Исследуйте поведение каждой из однозначных ветвей заданных аналитических функций в окрестности указанных точек и определите тип особенностей (если они есть):
а) $\dfrac{z}{1+\sqrt{z-3}}$, $z=4$, б) $z+\sqrt{z^2-1}$, $z=\infty$, в) $\dfrac{2z+3}{1+z-2\sqrt{z}}$, $z=1$,
г) $\cos\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z=1$, д) $\sin\dfrac{1}{1+\sqrt{z/(z-1)}}$, $z=\infty$.

2. Найдите вычеты $\mathrm{res}_{z=1}(f(z)dz)$ для каждой из однозначных ветвей функции а) $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2-z}+1}$, б) $f(z)=\exp\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{z}}\right)$.

3. Пусть регулярная ветвь $g(z)$ функции $\sqrt{z^2-4}$ определена в области D, представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности $|z|=2$, $\mathrm{Im}z\geq 0$, причем главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в окрестности ∞ равна z. Вычислите интеграл

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz}{g(z)-3z}.$$

4. Вычислите интеграл

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{dz}{(2+g(z))\sin z},$$

где $g(z)$ – однозначная ветвь функции $\sqrt{z-1}$ в круге $|z|<\frac{1}{2}$, такая, что $g(0)=i$.

5. Пусть $f(z)$ – регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{2z-8}$ в комплексной плоскости с разрезом по лучу $[4,4-i\infty]$ такая, что $f(8)=-1-i\sqrt{3}$. Вычислите интеграл

$$I=\oint_{|z-2|=3/2}\frac{dz}{f(z)-z+2}.$$

6. Вычислите интегралы с помощью вычетов:
а) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$.

7. Вычислите интеграл с помощью вычетов: $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\,dx$ $(0<\alpha<1)$.