Семинар 6.

Задача 1. Докажите, что прямая теорема Дезарга в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ равносильна обратной теореме Дезарга в двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$.

Задача 2. Даны четыре различные прямые l_1, l_2, l_3, l_4 одного пучка с центром A в проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. В двойственной плоскости им соответствуют четыре точки L_1, L_2, L_3, L_4 на проективной прямой $\check{A}$. Двойным отношением $(l_1 l_2 l_3 l_4)$ прямых l_1, l_2, l_3, l_4 назовем двойное отношение $(L_1 L_2 L_3 L_4)$ точек L_1, L_2, L_3, L_4. Произвольная прямая m в $\mathbb{P}^2$, не проходящая через точку A, пересекает прямые l_1, l_2, l_3, l_4 в точках M_1, M_2, M_3, M_4. Докажите, что $(M_1 M_2 M_3 M_4) = (l_1 l_2 l_3 l_4)$.

Задача 3. Даны два пучка $\check{A}$ и $\check{B}$ прямых с центрами A и B, $A \neq B$, в плоскости $\mathbb{P}^2$. Пусть задано проективное отображение $f : \check{A} \xrightarrow{\sim} \check{B}$ такое, что $f(AB) = AB$. Рассмотрим конику

$$C = \bigcup_{l \in \check{A}} (l \cap f(l)). \tag{1}$$

По построению C содержит прямую AB как подмножество. Найдите множество $C \setminus (AB)$.

Задача 4. Пусть пучки $\check{A}$ и $\check{B}$ прямых с центрами A и B, $A \neq B$, в плоскости $\mathbb{P}^2$ описываются уравнениями: $\check{A} = \{\lambda L_1 + \mu L_2 = 0 \,|\, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$, $\check{B} = \{\lambda M_1 + \mu M_2 = 0 \,|\, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$, где L_1, L_2, M_1, M_2 - ненулевые линейные формы от проективных координат $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим проективное отображение между пучками $\check{A}$ и $\check{B}$

$$f : \check{A} \xrightarrow{\sim} \check{B}, \quad l = \{\lambda L_1 + \mu L_2 = 0\} \mapsto f(l) = \{\lambda M_1 + \mu M_2 = 0\}.$$

Отображение f определяет конику C (по Штейнеру) равенством (1). Выразите уравнение коники C через линейные формы L_1, L_2, M_1, M_2.

Задача 5. В условиях предыдущей задачи для произвольной прямой $l_{(\lambda:\mu)} = \{\lambda L_1 + \mu L_2 = 0\} \in \check{A}$ найдите координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ точки $X_{(\lambda:\mu)} = l_{(\lambda:\mu)} \cap f(l_{(\lambda:\mu)})$ на конике C как однородные многочлены от λ и μ. Какова степень этих многочленов?