

Классическая теория поля 2020

Листок 3. Модели со скалярным полем. Обобщенные функции.

Срок сдачи: до 11:00, 02 декабря 2020

1. Рассмотрим свободное вещественное скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$

в 4-мерном пространстве Минковского. Разложим решение уравнения Эйлера-Лагранжа этой модели в сумму положительно и отрицательно частотных компонент:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a^\pm(\vec{p}) \frac{e^{\pm i p \cdot x}}{2p^0} \Big|_{p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}},$$

где $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ и $p \cdot x := p^\mu x_\mu$. Выразите сохраняющийся 4-вектор энергии-импульса P^μ поля ϕ в терминах амплитуд $a^\pm(\vec{p})$.

Напоминание: $P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x T^{0\mu}$, где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

2. В двумерном пространстве Минковского с координатами x^0 и x^1 и метрикой $g = \text{diag}(1, -1)$ рассмотрим скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{\beta^2} (1 - \cos(\beta\phi)).$$

- Найдите частное решение уравнений движения для поля ϕ в виде бегущей вправо волны $\phi(x) = f(x^1 - vx^0)$ такое, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f(-x)) = 2\pi/\beta$.
- Вычислите полную энергию и импульс найденной в пункте а) полевой конфигурации. Пользуясь релятивистским дисперсионным соотношением (связь энергии и импульса) определите величину “массы” полевого решения.

3. Рассмотрим систему двух свободных комплексных скалярных полей $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^2 \partial_\mu \bar{\phi}_i \partial^\mu \phi_i.$$

Помимо пространственно-временных симметрий (т.е., группы Пуанкаре) эта модель имеет и другие симметрии, называемые *внутренними*. Определите группу внутренних симметрий модели и найдите соответствующие сохраняющиеся токи.

Математическое дополнение: задачи про обобщенные функции

Напомним, что дельта-функцией Дирака, сосредоточенной в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, называется линейный непрерывный функционал δ_{x_0} на пространстве Шварца основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (бесконечно дифференцируемых вещественнозначных функций на \mathbb{R} , быстро убывающих на бесконечности, то же справедливо и для любых их производных), действующий по правилу:

$$\delta_{x_0}[f] = f(x_0).$$

С функционалом δ_{x_0} удобно обращаться как с ядерным функционалом, вводя фиктивное ядро – *дельта-функцию* $\delta(x - x_0)$, и записывая его действие в виде интеграла

$$\delta_{x_0}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)f(x)dx = f(x_0).$$

4. Докажите следующие равенства:

а)
$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus 0.$$

б)
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\exp(-\frac{x^2}{\varepsilon})}{\sqrt{\pi\varepsilon}} = \delta(x).$$

Напомним, что предел здесь понимается в слабом смысле, т.е. как предел линейных функционалов на пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

в) Докажите, что на пространстве основных функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ имеет место равенство обобщенных функций

$$\frac{d\theta(x - x_0)}{dx} = \delta(x - x_0),$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

5. Пусть кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода (конечные скачки) в точках $x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

а) Запишите обобщенную производную функции $f(x)$ с помощью дельта-функций.

б) Проиллюстрируйте общую формулу, найдя производную кусочно-гладкой функции следующего вида:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ x^2 + 2 & x \geq 1. \end{cases}$$

6. Докажите, что функция $f(r) = 1/|\vec{r}|$ удовлетворяет уравнению Пуассона с дельтаобразной правой частью:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r}|} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r}), \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Здесь Δ — дифференциальный оператор Лапласа на пространстве \mathbb{R}^3 , $\delta^{(3)}(\vec{r})$ — трехмерная дельта-функция: $\delta^{(3)}(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$, а приведенное выше уравнение интерпретируется как равенство обобщенных функций на пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.