

ТФКП, СЕМИНАР 7, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Пусть $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг. Существует ли голоморфное отображение $f: U \rightarrow U$, для которого $f(0) = \frac{1}{2}$ и $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$?
2. Пусть $a < b < c < d$ — действительные числа. Опишите возможно точнее отображение верхней полуплоскости с помощью функции

$$z \mapsto \int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}.$$

3. Постройте конформное отображение верхней полуплоскости на какой-нибудь равносторонний треугольник.
4. *Кольцом* будем называть область вида $U = \{z : a < |z| < b\}$, где $0 < a < b < +\infty$. Покажите, что два кольца конформно изоморфны тогда и только тогда, когда они подобны.
5. Существует ли такое конформное отображение между внутренностью квадрата и внутренностью прямоугольника с отношением сторон $1 : 2$, что при соответствии границ вершины переходят в вершины?
6. Аналогичный вопрос для равностороннего треугольника и равнобедренного прямоугольного треугольника.
7. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ — два плоских многоугольника с соответственно равными углами (т. е. $\angle A_1 = \angle B_1, \dots, \angle A_n = \angle B_n$). Покажите, что следующие два утверждения равносильны.
 - 1) Между внутренностями этих многоугольников существует такой конформный изоморфизм, что при соответствии границ вершины переходят в вершины.
 - 2) Многоугольники подобны.