

1

Секвенциальные равновесия

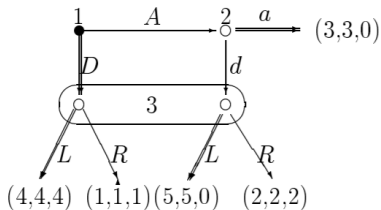
Введение

Бабич Максим

Высшая Школа Экономики

2020

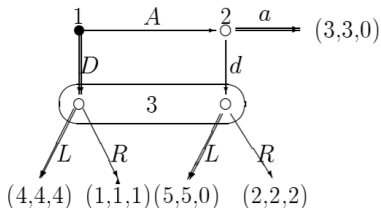
Пример



В примере "Ослик" Селтена выше можно заметить равновесие (D, a, L) . Оно совершенно, так как нет подыгр.

Замечание: если второй игрок уверен, что третий выберет L , то ему выгоднее выбрать d !

Пример



- Любая "подыгра" должна начинаться с информационного множества, но как принять рациональное решение?

Определение

Верой $\mu(h)$ называется ожидаемая вероятность нахождения в том или ином узле информационного множества h , если игра вдруг туда попадет.



Представление равновесия Нэша в новых терминах

- Предположим для некоторого игрока i заданы стратегия $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ и вера $\mu_i \in \Delta S_{-i}$

Стратегия и вера образуют равновесие Нэша, если:

- σ_i - лучший выбор при вере μ_i
- Каждая вера μ_i совпадает с $\bigotimes_{i \neq j} \sigma_j$

Первое условие отражает рациональность игроков

Второе условие показывает, что веры - "истинные т.е. совпадают с реальностью

Слабое секвенциальное равновесие

- Профиль стратегий образует семейство $\sigma = (\sigma_h, h \in H)$, где H - это множество информационных множеств развернутой игры, а $\sigma_h \in M(h)$, где $M(h)$ - множество ходов в заданном информационном множестве h
- Системой вер называется семейство $\mu = (\mu(h), h \in H)$

Чтобы быть секвенциальным равновесием пара (σ, μ) должна удовлетворять условиям, схожим с теми, что были определены на предыдущем слайде, но по порядку...

Слабое секвенциальное равновесие (усл 1)

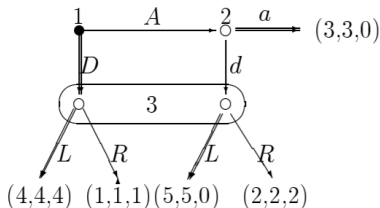
По факту первое условие требует рациональность выбора каждого игрока в каждом своем информационном множестве

Определение

Будем говорить, что игрок i_0 секвенциально рационален в информационном множестве h_0 , если, при фиксированных стратегиях других игроков, ожидаемый выигрыш при вере μ_0 достигает своего максимума в $(\sigma_i, h \in H_i)$

То есть, рассматривая исходную игру, как игру одного игрока, он должен действовать оптимально

Слабое секвенциальное равновесие (усл 1)



- В данном примере равновесие (D, a, L) не удовлетворяет первому условию, так как, предполагая, что третий выберет L , выбор a для второго - не рационален
- Соответственно, профиль стратегий называется секвенциально рациональным, если все игроки секвенциально рациональны в своих информационных множествах

Слабое секвенциальное равновесие (усл 2)

Второе условие требует, чтобы веры были оправданы "ранним" поведением σ хотя бы в следующем слабом смысле

Формирование веры

- Если информационное множество достигается с положительной вероятностью, то вера $\mu(h)$ должна быть вычислена по формуле Байеса
- Если информационное множество лежит вне пути игры, то вера $\mu(h)$ может быть задана произвольно

При таком построении, будет говорить, что веры *слабо согласованы* со стратегиями

Секвенциальное равновесие и равновесие Нэша

Теорема

Профиль стратегий σ является равновесием Нэша тогда и только тогда, если:

- 1) Система μ слабо согласована с σ
- 2) Профиль σ секвенциально рационален во всех информационных множествах, лежащих на пути игры

Секвенциальное равновесие и равновесие Нэша

Доказательство

⇒

Пусть σ - профиль стратегий, образующий равновесие Нэша ⇒ правило Байеса однозначно определяет веры μ ⇒ стратегии σ секвенциально рациональны, так как в противном случае игрок, делающий ход в h , мог бы получить больший выигрыш, изменив свою стратегию

Секвенциальное равновесие и равновесие Нэша

Доказательство

←

Пусть σ - профиль стратегий, секвенциально рациональных в информационных множествах на пути игры $\Rightarrow \sigma$ - равновесие Нэша, так как в противном случае игрок i может сыграть лучше, выбрав альтернативную стратегию в некотором информационном множестве h . Возьмем первое такое множество, в нем игрок не секвенциально рационален

Сильное секвенциальное равновесие

Определение

Профиль σ называется вполне смешанным, если любая позиция достигается с положительной вероятностью. В этом случае правило Байеса однозначно определяет систему вер μ

Определение

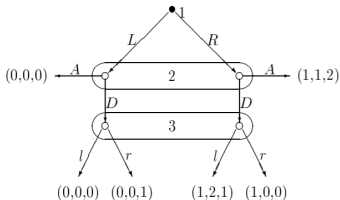
Система вер μ называется сильно согласованной с профилем стратегий σ , если существует последовательность вполне смешанных стратегических профилей σ_n , такая что σ_n сходится к σ , а соответствующие веры $\mu(\sigma_n)$ сходятся к μ

Сильное секвенциальное равновесие

Определение

Сильным секвенциальным равновесием называется пара (σ, μ) такая, что μ сильно согласована с σ , а σ секвенциально рациональна относительно μ

Слабое секвенциальное равновесие, но не сильное



Пусть третий верит, что реализуется левая вершина в его информационном множестве. Такая вера вместе со стратегиями (R, A, r) является слабым секвенциальным равновесием, потому что вера третьего, сильно согласованная со стратегиями R и A , указывает на правую вершину в информационном множестве 3. Сильным секвенциальным равновесием является (R, D, l)