Листок 3

Срок сдачи 02.12.2020

Квантовые модели с одной степенью свободы. Угловой момент и спин.

---

① Докажите, что дискретный спектр энергии одномерной квантовомеханической системы всегда невырожден, то есть каждому значению энергии $\mathcal{E}$ из дискретного спектра гамильтониана отвечает единственная (с точностью до умножения на $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) нормированная собственная функция $\psi(x)$ / Это утверждение (iii) со стр. 24 записок Лекции 7/.

Указание: исследуйте свойства вронскиана уравнения Шредингера / см. стр. 25–26 записок Лекции 7/

---

② Одномерная частица массы m находится в потенциальной яме

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x| \geq L/2, \\ -V_0 < 0, & \text{если } |x| < L/2. \end{cases}$$

Состояния дискретного энергетического спектра этой системы рассматривались в записках Лекции 7, стр. 27–34.

② В предположении $V_0 \gg \frac{\hbar^2}{mL^2}$ (грубо говоря, ширина ямы L — фиксирована, а глубина $V_0 \to +\infty$) вычислите уровни энергии связанных состояний частицы в окрестности дна потенциальной ямы:

$$\Delta E = |E| - V_0 \ll V_0 .$$

Посчитайте ΔE в 1-м и 2-м порядках малости по $\varepsilon = \frac{\hbar^2}{mL^2 V_0}$.

<u>Указание</u>. В расчётах удобно использовать модифицированное условие квантования энергии

$$\frac{k}{R} = \begin{cases} \pm\cos\frac{kL}{2} & \text{для чётных собственных ф-ций} \\ \pm\sin\frac{kL}{2} & \text{для нечётных собственных ф-ций} \end{cases}$$

/см. $\bigtriangledown\!\star$ на стр 32 и $\bigtriangleup\!\star$ на стр 33 записок лекции 7/

---

③ Среди наблюдаемых квантовомеханической системы присутствуют компоненты вектора углового момента (или спина) S_i, $i=1,2,3$ /обозначения, как в записках лекции 8/. Состояния системы $|m,s\rangle$ являются собственными для $\hat{S}^2$ и $\hat{S}_3$:

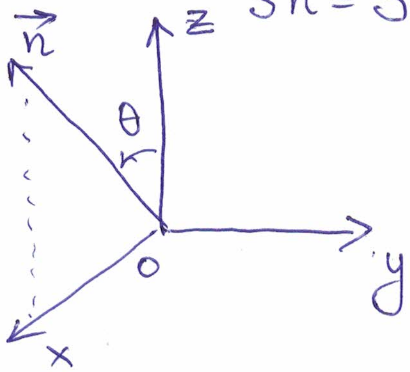
$$\hat{S}^2 |m,s\rangle = s(s+1)|m,s\rangle, \quad \hat{S}_3|m,s\rangle = m|m,s\rangle .$$

а) Найдите средние значения $\langle S_1\rangle$ и $\langle S_2\rangle$ и дисперсии ΔS_1, ΔS_2 первых двух компонент вектора $\vec{S}$ в состоянии $|m,s\rangle$, —

собственном состоянии S_3.

б) Проекция наблюдаемой $\vec{S}$ на направление $\vec{n}$ характеризуется оператором.

$$\hat{\vec{S}}\vec{n} = \hat{S}_\theta = \cos\theta \cdot \hat{S}_3 + \sin\theta \cdot \hat{S}_1$$ – см. рис.



Определите среднее значение $\langle S_\theta \rangle$ и дисперсию ΔS_θ этой наблюдаемой в состояниях $|m, s\rangle$.

в) Определите вероятность получения при измерении наблюдаемой S_1 максимально возможного значения s, если система находится в состоянии $|m, s\rangle$

г) Определите вероятность получения при измерении наблюдаемой $\vec{n}\vec{S}$ максимально возможного значения s, если система пребывает в состоянии $|m, s\rangle$.

<u>Указание</u>. Для решения пунктов в) и г) задачи удобно воспользоваться аналогами оператора $\hat{S}_+$, отвечающими проекциям S_1 и $\vec{n}\vec{S}$ вектора $\vec{S}$.

4 Пространство внутренних степеней свободы электрона описывается 2-мерным представлением алгебры операторов $\hat{S}_i$, $i = 1,2,3$.

Векторная наблюдаемая $\vec{S}$, сопоставляемая этим операторам называется <u>спином электрона</u>.

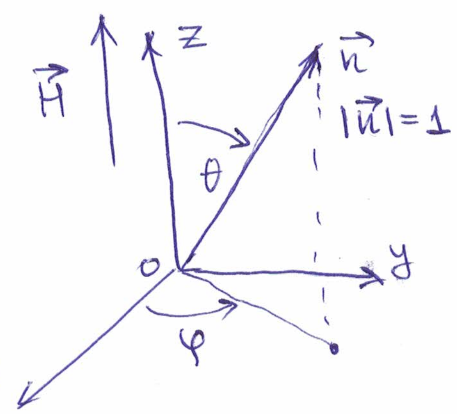
В базисе собственных векторов операторов $\hat{S}^2$ и $\hat{S}_3$ компоненты спина электрона задаются <u>матрицами Паули</u>:

$$\hat{S}_i = \frac{1}{2}\sigma_i\ ,\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Взаимодействие спина электрона с внешнего магнитным полем $\vec{H}$ описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = -\mu\left(\hat{\vec{S}}, \vec{H}\right).$$

Предположив, что магнитное поле постоянно, и направив ось OZ системы координат по направлению $\vec{H}$ определите, как будет меняться под действием поля $\vec{H}$ направление вектора спина электрона,



если в начальный момент времени он был направлен вдоль оси $\vec{n}$ (т.е., при $t=0$ состояние электрона было собственным вектором оператора $(\vec{n}, \hat{\vec{S}})$ с собственным значением $\frac{1}{2}$).

5. Квантовомеханическая система состоит из двух частиц, обладающих угловыми моментами (или спинами) $\vec{S}^{(1)}$ и $\vec{S}^{(2)}$. Наблюдатель приготавливает начальное состояние системы, в котором достоверно известны значения квадратов моментов $(\vec{S}^{(1)})^2$ и $(\vec{S}^{(2)})^2$, а также проекций моментов $S_3^{(1)}$ и $S_3^{(2)}$ на ось $\vec{Oz}$ — состояние

$$|\psi\rangle = |m_1, s_1\rangle \otimes |m_2, s_2\rangle$$

в обозначениях Лекции 8.

а) Каковы средние значения компонент

$$S_i = S_i^{(1)} + S_i^{(2)}$$

и квадрата $(\vec{S})^2$ полного углового момента (или спина) системы в состоянии $|\psi\rangle$?

б) Для состояния

$$|\psi\rangle = |s_1, s_1\rangle \otimes |s_2 - 1, s_2\rangle$$

определите возможные результаты измерения наблюдаемой $(\vec{S})^2$, а также вероятность наблюдения каждого из возможных результатов.

(6) Квантовая система состоит из двух частиц, обладающих угловыми моментами (спинами) одинаковой величины: $(\vec{S}^{(1)})^2 = (\vec{S}^{(2)})^2$

Постройте состояние $|\Phi\rangle$ системы, в котором полный угловой момент (спин) системы равен 0:

$$(\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)})^2 = 0.$$

Результат выразите в виде линейной комбинации состояний $|m_1, s\rangle \otimes |m_2, s\rangle$ $(s_1 = s_2 = s)$.

<u>Указание</u>: Воспользуйтесь условием $\hat{S}_\pm |\Phi\rangle = 0$