

Семинар 7.

Задача 1. На окружности $\omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$ в евклидовой плоскости даны две различные точки A и B . Рассмотрим отображение пучков $f : \check{A} \rightarrow \check{B}$, $l \mapsto m = BX$, где $\{A, X\} = l \cap \omega$. Докажите, что f - проективное отображение.

Вариант решения: воспользуйтесь тем, что для любых четырех различных точек $X, Y, Z, W \in \omega$ двойное отношение четырех прямых (AX, AY, AZ, AW) равно следующему отношению синусов углов между этими прямыми: $\frac{\sin(\widehat{XAZ})}{\sin(\widehat{XAW})} / \frac{\sin(\widehat{YAZ})}{\sin(\widehat{YAW})}$.

Задача 2. На проективной плоскости над полем \mathbb{K} характеристики $\neq 2$ даны две коники C_1 и C_2 , причем C_1 невырождена. Докажите, что число точек пересечения коник C_1 и C_2 не превосходит 4.

Указание: воспользуйтесь существованием рациональной параметризации коники C_1 .

Задача 3. Пусть однородные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в проективной плоскости являются однородными многочленами второй степени от однородных параметров $(\lambda : \mu)$:

$$x_i(\lambda, \mu) = a_i\lambda^2 + b_i\lambda\mu + c_i\mu^2, \quad i = 0, 1, 2.$$

Существует ли коника с уравнением $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ такая, что $F(x_0(\lambda, \mu), x_1(\lambda, \mu), x_2(\lambda, \mu)) \equiv 0$?

Задача 4. Найдите рациональную параметризацию окружности $\omega = \{x^2 + y^2 = 1\}$, используя пучок прямых с центром в точке $A = (-1, 0)$. В качестве параметра t в пучке \check{A} удобно использовать угловой коэффициент прямой пучка.

Задача 5. а) На невырожденной конике \mathcal{C} в проективной плоскости даны 6 различных точек. Сколько различных прямых Паскаля можно построить по этим 6 точкам.

б) Пусть невырожденная коника \mathcal{C} построена по Штейнеру с помощью проективного отображения $f : \check{A} \rightarrow \check{B}$, где A и B - две различные точки на \mathcal{C} . Можно ли построить \mathcal{C} по Штейнеру по любым двум другим различным точкам A_1 и B_1 на \mathcal{C} ?