Совершенные равновесия для нормальной формы

Мясоедова Анна,

НИУ ВШЭ

2020

Дрожащая рука

Интуитивно – нас интересуют только стратегии, устойчивые к маловероятным ошибкам.

Пример:

	$t1$	$t2$
$s1$	$10, 0$	$1, 1$
$s2$	$10, 10$	$0, 10$

Формально:

Смешанный профиль стратегий $\sigma_N = (\sigma_i)$ называется совершенным, если существует последовательность $(\sigma_N^n,\ i = 1, 2, \dots)$ вполне смешанных стратегий, которая сходится к σ_N, и такая, что для каждого игрока i и n стратегия σ_i есть наилучший ответ на профиль σ_{-i}^n.

Смешанная стратегия $\sigma \in \Delta(S_i)$ называется вполне смешанной, если она принадлежит внутренности симплекса $\Delta(S_i)$, т.е. с ненулевыми вероятностями использует все чистые стратегии.

Важно:

Если мы требуем оптимальность относительно сколь угодно малых отклонений, мы теряем существование такого равновесия.

Предложение:

Каждое совершенное равновесие – равновесие Нэша.

Существование

Для любой конечной игры совершенное равновесие существует.

Для некоторого «большого» числа k обозначим Δ^k симплекс в Δ чуть меньшего размера. Ограничим нашу игру на эти симплексы, получим игру G^k. У нее есть равновесия σ_N^k, в силу компактности считаем, что σ_i^k сходятся к некоторым стратегиям $\sigma_i \in \Delta(S_i)$. Хотим, чтобы для любого игрока i эта стратегия являлась наилучшим ответом на σ_{-i}^k при всех достаточно больших k. Тогда это будет совершенное равновесие σ_N.

Так как число граней симплекса конечно, существует подпоследовательность k такая, что все ее элементы σ_i^k лежат на одной и той же грани $\Delta^k(S_i)$. Тогда и предельная стратегия лежит на грани $\Delta(S_i)$. В силу аффиности функций полезности $U_i(\cdot, \sigma_{-i}^k)$ они принимают максимальные значения во всех вершинах этой грани $\Delta^k(S_i)$. А грань $\Delta(S_i)$, в свою очередь, параллельна ей, откуда функция $U_i(\cdot, \sigma_{-i}^k)$ принимает максимальные значения на той же грани симплекса $\Delta(S_i)$. Откуда следует искомое.

Связь с секвенциальными равновесиями

Пусть есть игра в нормальной форме Γ и соответствующая игра в развернутой G. Тогда для совершенного равновесия σ существует такой вектор вер μ, что (σ, μ) – секвенциальное равновесие в Γ.

Доказательство(идея):

По определению совершенного равновесия существует сходящаяся последовательность σ_N^k. В силу их невырожденности определяем набор согласующихся вер μ_N. Устремляем к пределу μ. Так как стратегия σ_i являлась наилучшим ответом на σ_{-i}^n, она будет оптимальным ответом при системе вер μ_N и при их пределе μ.

Следствие:

Пусть Γ – конечная игра с совершенной памятью. Тогда в ней существуют сильные секвенциональные равновесия.