Равновесие Нэша

Окончание

Романова Дарья

Высшая Школа Экономики

2020

Свойства

1. Сильно доминируемая стратегия не может входить в равновесие по Нэшу. Если $s_N^* = (s_N^*) \in NE(G)$, то для любого игрока i стратегия s_i^* не строго доминируется.
2. Пусть G^m - смешанное расширение конечной игры G, σ_i и σ_i' - две смешанные стратегии игрока i. σ_i доминирует σ_i' на чистых стратегиях остальных или на любых смешанных. (Следует из свойств смешанных равновесий).
3. Пусть $\sigma = \alpha \bigotimes s + (1-\alpha)\tau$, $\alpha > 0$ и стратегия s доминируется стратегией s' (можно даже смешанной). Тогда смешанная стратегия $\sigma' = \alpha \bigotimes s' + (1-\alpha)\tau$ сильно доминирует стратегию σ.

Вывод

Вывод

Пусть множества S_i' содержатся в S_i и получены удалением сильно доминируемых стратегий. Тогда

$$NE(G'^m) = NE(G^m),$$

если удаляются слабо доминируемые стратегии, то

$$NE(G'^m) = NE(G^m) \cap G'^m.$$

Пример

Игра - дележка долларов

Есть 100 долларов; каждый называет число от 0 до 100. Если сумма ≤ 100, каждый получает, что просил; иначе по нулям. Примеры равновесий: $(91, 9); (100, 0)$ и даже $(100, 100)$; но среди них есть фокальное $(50, 50)$ - каждый игрок понимает, что это эффективное и справедливое решение (не значит, что любой эффективный и справедливый исход может быть равновесием).

Вывод

Любое из равновесий, ожидаемое игроками, обладает самооправдывающим свойством.

Эффект фокальной точки

Это любое свойство, выделяющее конкретное равновесие среди остальных. Например, традиции, статус кво и т.д. (внемодельные вещи). Иногда (как в примере) фокальное равновесие определяется свойствами функции полезности.

Культурные нормы с теоретико-игровой т.з.

Культурные нормы - это правила, которые общество использует для выделения фокальных равновесий в конфликтных ситуациях (пример, правило ездить с правой стороны).

Определение - набросок

Перенесем определение $\Delta(X)$ - мн-во всех лотерей на мн-ве X (множество "чистых"исходов) с конечных множеств X на метрические компакты.

- Простые лотереи на X - конечные "выпуклые"комбинации $\sum_i \sigma_i \bigotimes x_i$ $(\sigma_i \geq 0, \sum \sigma_i = 1)$

Определение - набросок

Перенесем определение $\Delta(X)$ - мн-во всех лотерей на мн-ве X (множество "чистых"исходов) с конечных множеств X на метрические компакты.

- Простые лотереи на X - конечные "выпуклые"комбинации $\sum_i \sigma_i \bigotimes x_i$ $(\sigma_i \geq 0, \sum \sigma_i = 1)$
- Множество простых лотерей обозн. $\Delta_0(X)$

Определение - набросок

Перенесем определение $\Delta(X)$ - мн-во всех лотерей на мн-ве X (множество "чистых"исходов) с конечных множеств X на метрические компакты.

- Простые лотереи на X - конечные "выпуклые"комбинации $\sum_i \sigma_i \bigotimes x_i$ $(\sigma_i \geq 0, \sum \sigma_i = 1)$
- Множество простых лотерей обозн. $\Delta_0(X)$
- Перенесем на $\Delta_0(X)$ метрику ρ с X: пусть μ, ν - лотереи, расстояние между которыми - минимальная "стоимость"перевозки массы μ в ν

Определение - набросок

Перенесем определение $\Delta(X)$ - мн-во всех лотерей на мн-ве X (множество "чистых"исходов) с конечных множеств X на метрические компакты.

- Простые лотереи на X - конечные "выпуклые"комбинации $\sum_i \sigma_i \bigotimes x_i$ $(\sigma_i \geq 0, \sum \sigma_i = 1)$
- Множество простых лотерей обозн. $\Delta_0(X)$
- Перенесем на $\Delta_0(X)$ метрику ρ с X: пусть μ, ν - лотереи, расстояние между которыми - минимальная "стоимость"перевозки массы μ в ν
- $\Delta(X)$ - пополнение $\Delta_0(X)$ в этой метрике. На $\Delta(X)$ метрика, продолжающая метрику ρ на X

Теорема Гликсберга

Теорема

Если стратегические множества S_i компактны, а полезности u_i непрерывны, то существует равновесие Нэша в рандомизированных стратегиях.

Доказательство.

Введём ϵ-равновесие: ситуация s_N^* является ϵ-равновесием, если для любого игрока i и любой стратегии s_i

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) - \epsilon.$$

Функции выигрыша равномерно непрерывны $\Rightarrow$ $|u_i(s) - u_i(s')| < \epsilon$ при $\rho(s, s') < \delta$. $\square$

Теорема Гликсберга

Доказательство.

Для каждого игрока построим конечную δ-сеть $X_i \subset S_i$. Рассмотрим конечную игру $(N, (X_i), (u_i|_{X_i}))$ и некоторое (смешанное) равновесие $\sigma_N \in \bigotimes_i \Delta(X_i)$ в ней. Этот профиль не обязан быть равновесием в исходной игре (в смешанном расширении), но σ_N - ϵ-равновесие в G^m.
Тогда для каждого $\epsilon > 0$ найдено ϵ-равновесие, а при $\epsilon \to 0$ и $\Delta(S)$ компактном получим равновесие в смешанном расширении исходной игры. $\square$

Пример - "дикий"аукцион доллара

1. $n > 1$ участников, называют числа $x_i \geq 0$
2. Выигрыш

$$u(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} -x_i & \text{если } x_i < x^*_{-i} \\ 1 - x_i & \text{если } x_i > x^*_{-i} \end{cases}$$

3. $F(x)$ - функция распределения искомой смешанной стратегии $\Rightarrow$

$$Eu_i(x) = (1-x)F(x)^{n-1} - x(1 - F(x)^{n-1}) = F(x)^{n-1} - x$$

4. Все x равновыгодные *Rightarrow* дают нулевой ожидаемый выигрыш $\Rightarrow F(x) = x^{1/(n-1)} \Rightarrow Ex_i = 1/n$

Спасибо за внимание!